Übungszirkel „Lineare Gleichungssysteme: Station 7
Lösen von Gleichungssystemen mit der Cramerschen Regel

Für die Lösung eines Gleichungssystems aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten kann man eine Formel aufstellen. Dazu betrachten wir das folgende allgemeine Gleichungssystem:

(I) $a_1x + b_1y = c_1$
(II) $a_2x + b_2y = c_2$

Dabei sind a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 rationale Zahlen, x und y die Unbekannten. Um nach dem Additionsverfahren x zu eliminieren, müssen wir (I) mit a_2 und (II) mit a_1 multiplizieren und die Gleichungen danach voneinander abziehen:

(I) $\cdot\ a_2$ $a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1$ (I')
(II) $\cdot\ a_1$ $a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2$ (II')
(II') - (I') $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$ / : $(a_1b_2 - a_2b_1)$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Ebenso erhält man für x:

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Dies geht jedoch nur, wenn der Term $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ist. Daher heißt dieser Term **Determinante** des Gleichungssystems.

Leichter lässt sich das merken, wenn man allgemein definiert:

Definition:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$ heißt Determinante.

Cramersche Regel:

Für die Lösung des Gleichungssystems

(I) $a_1x + b_1y = c_1$
(II) $a_2x + b_2y = c_2$

berechnet man nun die Determinanten

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ und $D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ und $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

a) Ist $D \neq 0$, so ist $x = \frac{D_1}{D}$ und $y = \frac{D_2}{D}$ die Lösung des Gleichungssystems.

b) Ist $D = 0$ und $D_1 \neq 0$ oder $D_2 \neq 0$, so ist die Lösungsmenge leer.

c) Sind alle drei Determinanten gleich 0, so gibt es unendlich viele Lösungen.

Notiere nun die Überschrift **Cramersche Regel** ins Heft und schreibe dazu alles, was in den beiden Kästen steht, ab.