

## Übungszirkel „Lineare Gleichungssysteme: Station 9

### Lineare Optimierung

Das **Beispiel 2** von **Station 8** wird nun fortgesetzt. Hier nochmal der Aufgabentext:

Ein Blumengroßhandel beliefert einen Landschaftsgärtner mit Grassamen und Dünger. Der Lastwagen für die Lieferungen kann höchstens 3 t einladen. Ein Sack Grassamen wiegt 50 kg, ein Sack Dünger 35 kg. Für eine Parkanlage benötigt der Gärtner höchstens doppelt so viel und mindestens halb so viele Säcke Grassamen wie Dünger. Ermittle zeich

In Station 8 wurden alle Punkte  $(x;y)$ , die die Bedingungen erfüllen, markiert.

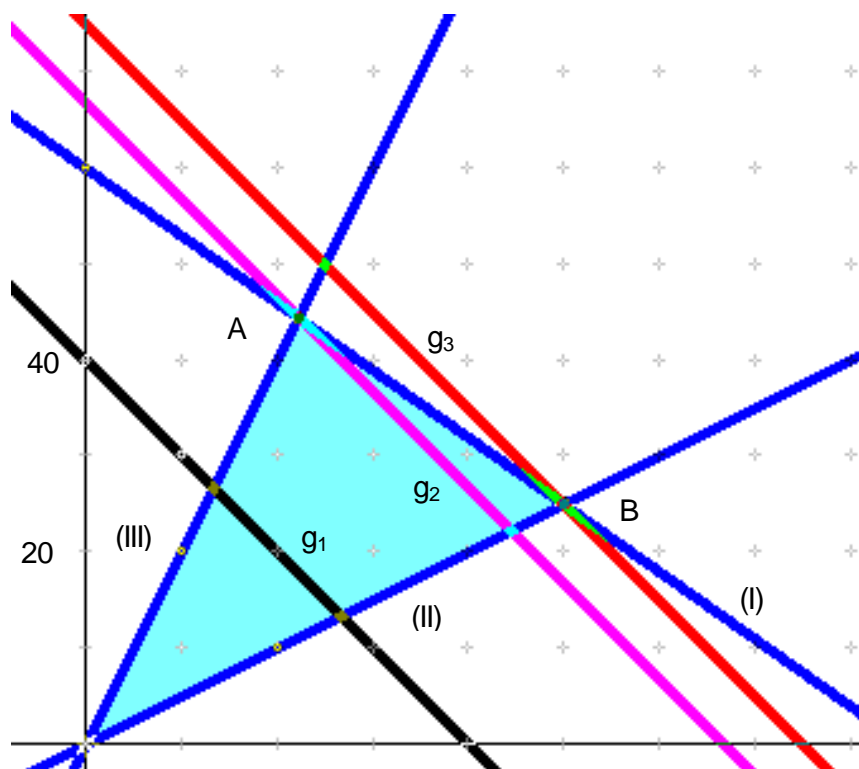
- a) Nun möchte der Händler möglichst viele Säcke transportieren. Wie viele jeder Sorte sind das?

#### Lösung:

Die Anzahl der Säcke wird beschrieben durch die Zuordnung  
Beladung  $(x;y) \rightarrow$  Sackanzahl  $x + y$  (Zielfunktion)

Ist die Anzahl der transportierten Säcke  $c$ , so gilt also  $x + y = c$ ; mögliche Zahlenpaare  $(x;y)$  hierfür erfüllen also diese Gleichung; sie liegen daher auf der Geraden mit der Gleichung  $y = -x + c$ . Dies ist eine Gerade mit der Steigung  $m = -1$  und dem  $y$ -Abschnitt  $c$ . Für verschiedene Werte von  $c$  erhält man parallele Geraden. Man nennt dies eine **Geradenschar**.

Da andererseits die möglichen Zahlenpaare  $(x;y)$  für die Beladung des Lastwagens in der im Beispiel 2 blau gekennzeichneten Menge liegen müssen, suchen wir aus der Schar der parallelen Geraden  $y = -x + c$  diejenige aus, die durch die gekennzeichnete Menge verläuft und den größten  $y$ -Abschnitt  $c$  aufweist.



Als Beispiel für eine Gerade der Geradenschar ist in der Zeichnung vom Beispiel 2 aus Station 8 die Gerade  $g_1$  mit  $c = 40$  gezeichnet. Die Gerade  $g_2$  verläuft durch den Punkt A, die Gerade  $g_3$  durch den Punkt B. Von allen parallelen Geraden der Schar, die die blau gekennzeichnete Menge schneiden, hat  $g_3$  den größten  $y$ -Abschnitt  $c$ . Daher ergibt sich die maximale Anzahl von transportierbaren Säcken aus den Koordinaten von B, der als Lösung des Gleichungssystems (I) und (II) von Beispiel 2 zu berechnen ist:  $B(50/25)$ , d.h. es können maximal 50 Säcke Dünger und 25 Säcke Grassamen transportiert werden.

Als Beispiel für eine Gerade der Geradenschar ist in der Zeichnung vom Beispiel 2 aus Station 8 die Gerade  $g_1$  mit  $c = 40$  gezeichnet. Die Gerade  $g_2$  verläuft durch den Punkt A, die Gerade  $g_3$  durch den Punkt B. Von allen parallelen Geraden der Schar, die die blau gekennzeichnete Menge schneiden, hat  $g_3$  den größten  $y$ -Abschnitt  $c$ . Daher ergibt sich die maximale Anzahl von transportierbaren Säcken aus den Koordinaten von B, der als Lösung des Gleichungssystems (I) und (II) von Beispiel 2 zu berechnen ist:  $B(50/25)$ , d.h. es können maximal 50 Säcke Dünger und 25 Säcke Grassamen transportiert werden.

**Übungszirkel „Lineare Gleichungssysteme: Station 9  
Lineare Optimierung - Fortsetzung**

- b) Der Gewinn des Blumengroßhändlers beträgt bei einem Sack Dünger 4 DM und bei einem Sack Grassamen 8 DM. Wie viele Säcke jeder Sorte muss er liefern, wenn er den größtmöglichen Gewinn machen will?

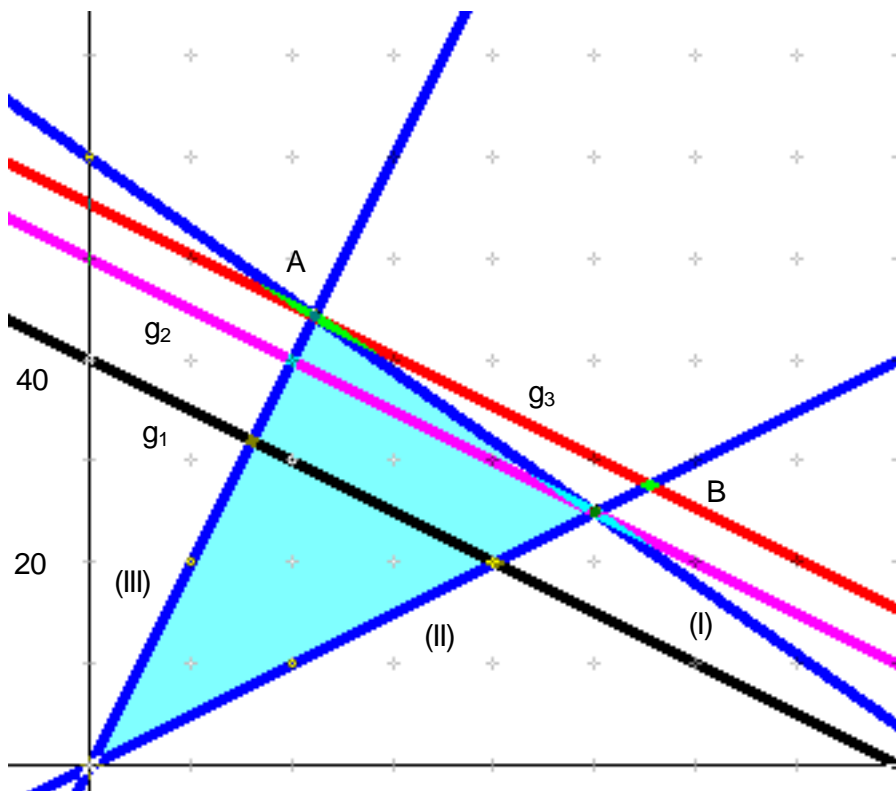
**Lösung:**

Der Gewinn wird beschrieben durch die Zuordnung  
Beladung  $(x;y) \rightarrow$  Gewinn  $4x + 8y$  (Zielfunktion)

Wir suchen nun wieder den Punkt der blau gekennzeichneten Menge, für den die Zielfunktion den größtmöglichen Wert annimmt. Dazu nehmen wir an, der Gewinn beträgt  $g$  DM. Dann gilt die Gleichung  $4x + 8y = g$ . Alle Zahlenpaare, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf der Geraden  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}g$ . Es handelt sich wiederum um eine

Schar von parallelen Geraden mit der Steigung  $m = -\frac{1}{2}$  und dem  $y$ -Abschnitt  $\frac{1}{8}g$ .

Also suchen wir wieder unter allen Geraden der Schar diejenige aus, die durch die blau gekennzeichnete Menge verläuft und den größten  $y$ -Abschnitt aufweist.



Diesmal handelt es sich um die Gerade  $g_3$ , die das gekennzeichnete Gebiet im Punkt A schneidet. Dieser hat die Koordinaten  $A\left(22\frac{2}{9} / 44\frac{4}{9}\right)$

Der ihm nächstgelegene Gitterpunkt ist  $(22/44)$ . Also muss der Lastwagen mit 22 Düngersäcken und 44 Grassamensäcken beladen werden. Der Gewinn ist dann 440 DM.