Historisches/Ausblick

Das Studium der endlichen Spiegelungsgruppen begann in gewissem Sinne wohl schon zu Zeiten, als die griechischen Naturphilosophen (insbesondere die Pythagoreer) die fünf platonischen Körper „zum Leben erweckten". Wie in Kapitel 3 dargelegt, stellen ihre vollständigen Symmetriegruppen endliche Spiegelungsgruppen dar.

Die platonischen Körper sind gerade die dreidimensionalen, regelmäßigen (konvexen) Polyeder, denn: Die Innenwinkel in einem regelmäßigen n-Eck sind gleich $(\frac{n-2}{n})\pi$. Treffen sich k dieser n-Ecke an einem Punkt, um eine Ecke eines konvexen Körpers zu bilden, so muß

$$k\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi < 2\pi$$

erfüllt sein. Lösungen $\{n, k\}$ für diese Ungleichung innerhalb der natürlichen Zahlen sind nur $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$ und $\{5, 3\}$, welche gerade den fünf platonischen Körpern zugeordnet werden können. Auffällig ist, daß die Lösungen gerade den Kantenbeschriftungen der zugehörigen Coxetergraphen entsprechen. Im übrigen bezeichnet man die Notation $\{n, k\}$ als **Schläflisymbol** des Polyeders, benannt nach dem Schweizer Mathematiker *Ludwig Schläfli* (1814-1895).

Aus heutiger Sicht erscheint es naheliegend, von den dreidimensionalen Polyedern ausgehend, auch im n-dimensionalen euklidischen Raum ($n \in \mathbb{N}$) eine Klassifizierung regelmäßiger **Polytope** anzustreben. Doch der Übergang in die höherdimensionale Geometrie überstieg laut Coxeter [13], S.141, auch Mitte des 19. Jahrhunderts noch das Vorstellungsvermögen der meisten Denker, mit Ausnahme einiger weniger, zu denen auch Schläfli zu zählen ist. Schläfli löste zu dieser Zeit denn auch als erster das Klassifikationsproblem der n-dimensionalen regelmäßigen Polyope, wie Hiller in [20], S.49, vermerkt. (Schläflis gesammeltes Werk ist in [31] zu finden.) Laut Hiller ([20], S.49) blieb Schläflis Arbeit dennoch weitestgehend unbekannt, da auch andere Mathematiker diese Klassifikation nach und nach ausarbeiteten, etwa *W. Stringham* im Jahre 1880 in [33]. Hiller bemerkt zudem leicht ironisch, daß sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts vor allem „'English–gentlemen' mathematics" (Ibid.) mit den Polytopen beschäftigten: „Petrie, a schoolmaster; Gosset, a lawyer; Donichan, a rug dealer and Alicia Stott, the middle one of Boole's five daughters, a housewife" (Ibid.). Sehr gut zur Einarbeitung in diese Materie eignet sich wohl Coxeter [13], wobei *Coxeter* Schläflis Notation verwendet. (Vielen endlichen Spiegelungsgruppen (vom Rang n) werden dort n-dimensionale, regelmäßige Polytope zugeordnet: Beispielsweise findet man in §6.4, daß $\mathcal{F}_4$ als die vollständige Symmetriegruppe eines regelmäßigen, vierdimensionalen Körpers aufgefaßt werden kann, dessen 24

„Seiten" von je einem Oktaeder gebildet werden; der Gruppe $\mathcal{H}_4$ wird eben dort ein vierdimensionales Polytop zugeschrieben, mit 120 Dodekaedern als Seiten (dual: 600 Tetraeder).)

Diese Studien erhielten in den 20er Jahren eine völlig neue Richtung durch Mathematiker wie *Cartan*, die entdeckten (wie etwa Cartan 1927 in [5]), daß die Klassifikation der regelmäßigen Polytope ausgenutzt werden könnte, um die einfachen Lie Algebren über den komplexen Zahlen zu klassifizieren (vgl. Hiller [20], S.49). (Zur Definition von Lie Algebren über einem Körper siehe Carter [7], S.33, oder Humphreys [21], S.65,91.) Ein Jahr später, 1928, betrachtete Cartan in [6] endliche, von Spiegelungen erzeugte Gruppen im n-dimensionalen Raum; dabei zeigte er, daß der Fundamentalbereich der Gruppen ein **Simplex** sein muß. (Zur Definition eines Simplex siehe z.B. Munkres [30].) (Schon im Jahre 1889 hatte *Goursat* in [18] alle endlichen Spiegelungsgruppen in vier Dimensionen klassifiziert, der sein Wissen über die regelmäßigen Polytope laut Coxeter ([13], S.209) wiederum von Stringham [33] bezog.)

Coxeter reichte drei Jahre später in [10] den Beweis nach, daß Cartans Auflistung komplett war. Dabei ging er auf sehr geometrische Art und Weise vor, unter Ausnutzung der graphischen Darstellung, die wir in Abschnitt 7.1 vorgestellt haben; Coxeter ist der „Erfinder" dieser nach ihm benannten Graphen. 1934 dann erscheint einer der Meilensteine in der Geschichte der endlichen Spiegelungsgruppen: Coxeter arbeitet in [11] seine Studien aus; er klassifiziert alle endlichen (positiv semidefiniten) Coxetergruppen und überträgt dabei die durch den sphärischen Simplex gegebenen Informationen (Winkel zwischen den nach außen gerichteten Normalenvektoren unserer Kammern) in die uns wohlbekannten Graphen. Die Klassifikation der endlichen (irreduziblen) Spiegelungsgruppen war damit zunächst einmal abgeschlossen, inklusive der Bestimmung ihrer Mächtigkeiten.

1940 veröffentlichte dann *Witt* mit [35] einen längeren Aufsatz, der die Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen beinhaltet. Witt rollt Coxeters Pionierarbeit neu auf, allerdings aus stärker algebraischem Blickwinkel. Dieses Werk enthält eine Vielzahl wunderbarer Argumentationen, auf die auch Coxeter in [13] zurückgreift, wo er die Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen wieder mit aufführt. Beispielsweise geht die Zuordnung von Matrizen (bzw. definiten quadratischen Formen) zu den Fundamentalbereichen auf Witt zurück (inklusive der Beweisführung, wie wir sie in Kapitel 7 praktiziert haben), ebenso wie die von mir in Abschnitt 8.3 verwendete Argumentationsweise (Witt benutzt sie allerdings nur für den Graphen H_4). Bei Witt findet man auch Wurzelsysteme zu allen zusammenhängenden, positiv definiten Coxetergraphen (er nennt sie „Vektordiagramme"), und mittels dieser bestimmt er die Mächtigkeiten der einzelnen Gruppen, wie auch bei uns geschehen.

Betonungen auf Austausch- oder Auslassungseigenschaft wurden laut Humphreys [22], S.28, erst in den 60er Jahren gesetzt, was man dann auch bei Bourbaki [4], IV, §1, findet.

Weitere historische Informationen kann man bei Bourbaki [4], *Note historique*, Hiller [20], S.48–52, und Coxeter [13], *Historical remarks* erhalten.

Warum aber wählten wir (wie Humphreys [22]) den Buchstaben $\mathcal{W}$ für endliche Spiegelungsgruppen? Dies liegt daran, daß die meisten dieser Gruppen gleichzeitig **Weylgruppen** sind (mit Ausnahme der Gruppen, deren Graphen eine Zusammenhangskomponente vom Typ $\mathrm{I}_2^m(m \neq 6)$, H_3 oder H_4 besitzen). Vergleiche dazu z.B. die Kapitel 2 und 3 bei Carter [7]. Weylgruppen unterscheiden sich von den endlichen Spiegelungsgruppen lediglich dadurch, daß ihnen zugeordnete Wurzelsysteme eine zusätzliche **kristallographische Bedingung** zu erfüllen haben: Für $\alpha, \beta \in \Phi$ muß

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$$

gelten.

Man kann die Klassifikation der Weylgruppen nahezu genauso vorantreiben, wie bei uns für die endlichen Spiegelungsgruppen geschehen (vgl. Carter [7], Kapitel 2,3, oder auch Bourbaki [4], Kapitel VI). Dabei zeigt sich, daß die Weylgruppen gerade die endlichen Spiegelungsgruppen sind, für die $m(\alpha,\beta) \in \{2,3,4,6\}$ für alle $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in \Delta$ gilt. All diese Gruppen $\mathcal{W}$ stabilisieren über $sL = L$ für alle $s \in \mathcal{W}$ ein **Gitter** L in V (den $\mathbb{Z}$-Aufspann einer Basis von V). Insbesondere bewirkt die kristallographische Bedingung (beachte die Spiegelungsformel (1.1) und die Definition eines Wurzelsystems), daß jede Wurzel eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination einfacher Wurzeln ist und der $\mathbb{Z}$-Aufspann der einfachen Wurzeln bei wesentlich operierenden Gruppen ein $\mathcal{W}$-stabiles Gitter darstellt.

Beim Studium der irreduziblen Weylgruppen stößt man ferner auf ein Resultat bezüglich der Längenverhältnisse der Wurzeln: Ein Teil der irreduziblen Wurzelsysteme enthält nur Wurzeln gleicher Länge, der andere dagegen nur solche genau zweier Längen (wobei zwei verschiedene Längenverhältnisse auftreten). Unterscheidet man auf diese Weise zwischen **kurzen** und **langen Wurzeln** (enthält Φ nur Wurzeln einer Länge, so betrachtet man diese als lang), so kann man diese Information zusätzlich in einen Coxetergraphen mit aufnehmen. Diese leicht modifizierte Variante unserer Graphen nennt man **Dynkindiagramme**. Überraschend ist nun die Tatsache, daß dadurch lediglich ein neuer Graph hinzukommt, d.h. nur einer einzigen (irreduziblen) Weylgruppe mehr als ein Dynkindiagramm zugeordnet ist: Es handelt sich um die Gruppe $\mathcal{B}_n$, die nach Bourbaki [4], Kapitel VI, die Weylgruppe zweier mit B_n und C_n bezeichneten Dynkindiagramme darstellt. Dies illustriert, warum bei unserer (an Bourbaki angelehnten) Notation für die zusammenhängenden, positiv definiten Coxetergraphen der Buchstabe C ausgelassen wurde.

Ferner liefert die Betrachtung der irreduziblen Weylgruppen direkte Informationen darüber, welche (einfachen) Spiegelungen in der jeweiligen Gruppe zueinander konjugiert sind: Zwei Spiegelungen s_α und s_β einer irreduziblen Gruppe sind in dieser genau dann zueinander konjugiert, wenn α und β entweder beide kurz oder beide lang sind. Danach könnten wir unser Wurzelsystem zum Graphen F_4 modifizieren, indem wir in der Teilmenge $\{\frac{1}{2}\sqrt{2}(\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid i < j\}$ den Vorfaktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ entfernen (vergleiche Humphreys [22], S.42).

Zudem spielt die bei uns zumeist mit $\tilde{\alpha}$ bezeichnete Wurzel eine besondere Rolle in den Wurzelsystemen zu irreduziblen Weylgruppen. Sie ist die bezüglich einer auf Δ basierenden Totalordnung von V eindeutige Wurzel maximaler Höhe und liegt (betrachte die Spiegelungsformel zusammen mit (R2)) automatisch im Fundamentalbereich der Gruppe bezüglich Δ; vergleiche Humphreys [22], S.40,44.

Detailliertere Informationen über Struktur und Geometrie der Gruppen $\mathcal{E}_n$

findet man bei Coxeter [15]; dort beendete er 1988 die aus drei Teilen bestehende Arbeit *Regular and semi-regular polytopes*, die er 1940 mit [12] begann und nach 45(!) Jahren 1980 in [14] wieder aufnahm. In [15] stellt Coxeter zudem eine neue Formel zur Berechnung der Ordnungen der drei Gruppen vor.

In einem kleinen Aufsatz [24] untersucht *B. Huppert* die Gruppe $\mathcal{H}_4$ genauer, unter Verwendung darstellungstheoretischer Methoden.

Literaturverzeichnis

[1] William A. Adkins, Steven H. Weintraub: *Algebra: an approach via module theory,* Springer–Verlag, New York, 1. Auflage (1992)

[2] M.A. Armstrong: *Groups and Symmetry,* Springer–Verlag, New York (1988)

[3] M. Aschbacher: *Finite group theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage (1988), chapters 10, 14

[4] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5 et 6,* Hermann, Paris (1968); Masson, Paris (1981)

[5] É. Cartan: „La géométrie des groupes simples“, *Annali di Matematica (4)* **4** (1927), S.209–256

[6] É. Cartan: „Complément au mémoire sur la géométrie des groupes simples“, *Annali di Matematica (4)* **5** (1928), S.253–260

[7] Roger W. Carter: *Simple Groups Of Lie Type,* John Wiley & Sons, London (1972)

[8] C. Chevalley: „Invariants of finite groups generated by reflections“, *American Journal of Math.* **77** (1955), S.778–782

[9] H.S.M. Coxeter: „The densities of the regular polytopes“, *Proceedings of the Cam. Phil. Soc.* **27** (1931), S.201–211

[10] H.S.M. Coxeter: „Groups whose fundamental regions are simplexes“, *The Journal of the London Math. Soc.* **6** (1931), S.132–136

[11] H.S.M. Coxeter: „Discrete groups generated by reflections“, *Annals of Math.* **35** (1934), S.588–621

[12] H.S.M. Coxeter: „Regular and semi-regular polytopes.I“, *Mathematische Zeitschrift* **46** (1940), S.380–407

[13] H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes,* Dover Publications, Inc., New York, 3. Auflage (1973)

[14] H.S.M. Coxeter: „Regular and semi-regular polytopes.II“, *Mathematische Zeitschrift* **188** (1985), S.559–591

[15] H.S.M. Coxeter: „Regular and semi-regular polytopes.III“, *Mathematische Zeitschrift* **200** (1988), S.3–45

[16] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser: *Generators and Relations for Discrete Groups,* Springer–Verlag, Berlin, 4. Auflage (1980)

[17] G. Fischer: *Lineare Algebra,* Vieweg, Braunschweig, 9. Auflage (1989)

[18] Goursat: „Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace“, *Annales Sci. de l'École Norm. Sup. (3)* **6** (1889), S.9–102

[19] L.C. Grove, C.T. Benson: *Finite Reflection Groups,* Springer–Verlag, New York, korrigierte 2. Auflage (1996)

[20] H. Hiller: *Geometry of Coxeter Groups,* Pitman, Boston (1982)

[21] James E. Humphreys: *Linear Algebraic Groups,* Springer–Verlag, New York (1981)

[22] James E. Humphreys: *Reflection Groups and Coxeter Groups,* Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage (1992)

[23] B. Huppert: *Endliche Gruppen I,* Springer–Verlag, Berlin (1967), S.140f

[24] B. Huppert: „Zur Konstruktion der reellen Spiegelungsgruppe $\mathcal{H}_4$“, *Acta Math. Ac. Scient. Hungaricae,* **26**(3–4) (1975), S.331–336

[25] G. James, M. Liebeck: *Representations and Characters of Groups*, Cambridge University Press, Cambridge (1993)

[26] A.I. Kostrikin: *Enzyclopaedia of Math. Sciences* **11**, *Algebra I,* Springer–Verlag, Berlin (1989), §13

[27] Hans Kurzweil: *Endliche Gruppen,* Springer–Verlag, Berlin (1977)

[28] Klaus Lamotke: *Regular Solids and Isolated Singularities,* Vieweg, Braunschweig (1986)

[29] K. Meyberg: *Algebra, Teil 1,* Hanser, München, 2. Auflage (1980)

[30] James R. Munkres: *Elements of Algebraic Topology,* Addison–Wesley, Redwood City (1984)

[31] L. Schläfli: „Theorie der vielfachen Kontinuität“, *Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft* **38** (1901), S.1–237

[32] G.C. Shepard, J.A. Todd: „Finite unitary reflection groups“, *Canadian Journal of Math.* **6** (1954), S.274–304

[33] W. Stringham: „Regular figures in n-dimensional space“, *American Journal of Math.* **3** (1880), S.1–14

[34] J.A. Todd: „The groups of symmetries or the regular polytopes“, *Proceedings of the Cam. Phil. Soc.* **27** (1931), S.212–231

[35] Ernst Witt: „Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe“, *Abhandl. a. d. Seminar d. Univ. Hamburg* **14** (1941), S.289–322

[36] Paul B. Yale: *Geometry and Symmetry,* Holden–Day, San Francisco (1968)

Abbildungsverzeichnis

Index