

Teil I

**Endl. Spiegelungsgruppen
in 2 und 3 Dimensionen**

Kapitel 2

Zweidimensionales

Sei in diesem Kapitel stets $\dim V = 2$, sowie $E := \{\epsilon_1 = (1, 0), \epsilon_2 = (0, 1)\}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^2 . (Vektoren werden der Einfachheit halber auch als Zeilenvektoren notiert.) O.B.d.A. werden wir V mit der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 identifizieren, vgl. Kapitel 1. Dieses Kapitel ist bewußt sehr ausführlich gehalten, um vor allem den geometrischen Äquivalenzbegriff für unsere Gruppen genau verstehen zu lernen. Schon in Kapitel 3 wird darauf nicht mehr in dieser Ausführlichkeit eingegangen.

2.1 Endliche Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$

Wie der folgende Satz zeigt, bedeutet im zweidimensionalen euklidischen Raum die Orthogonalitätsforderung für die Elemente von $\mathcal{O}(V)$ eine deutliche Einschränkung:

2.1.1 Satz *Eine orthogonale Transformation $d \in \mathcal{O}(V)$ ist entweder eine Drehung (auch im geometrischen Sinne) oder eine Spiegelung.*

Beweis: d ist eindeutig bestimmt durch die Bilder der Vektoren einer Basis, etwa E . Für diese, $d\epsilon_1 =: (x_1, x_2)$ und $d\epsilon_2 =: (y_1, y_2)$, gilt dann aufgrund der Längen- und Orthogonalitätstreue von d : $x_1^2 + x_2^2 = 1 = y_1^2 + y_2^2$, sowie $x_1 y_1 = -x_2 y_2$. Daraus folgt $y_2 = \pm x_1$ und $y_1 = \mp x_2$, also $d\epsilon_2 = \pm(-x_2, x_1)$.

Wir wählen nun den (eindeutigen) Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $x_1 = \cos \theta$ und $x_2 = \sin \theta$. Für $d\epsilon_2 = (-x_2, x_1)$ ist dann die darstellende Matrix von d bezüglich E gegeben durch

$$d_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die geometrische Wirkung von d ist also die einer Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel θ , und tatsächlich finden wir auch $\det d = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Ist dagegen $d\epsilon_2 = -(-x_2, x_1)$, so erhalten wir

$$d_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

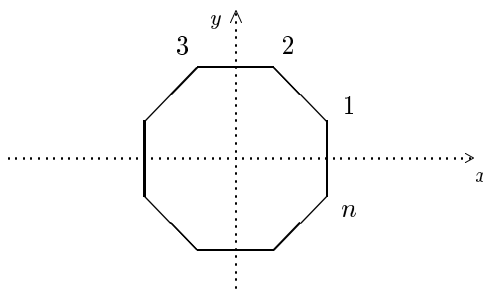
was einer Spiegelung an $\mathbb{R}\beta$ mit $\beta = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$ entspricht. Dazu: Die Eigenwerte von d_E sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Man findet zugehörige Eigenvektoren $\gamma_{\lambda_1} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$ und $\gamma_{\lambda_2} = (-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))$, die aufeinander senkrecht¹ stehen. Deshalb ist d eine Spiegelung im Sinne von Definition 1.1.4, mit $\alpha := \gamma_{\lambda_2}$ und $H_\alpha := \mathbb{R}\gamma_{\lambda_1}$. In der Basis $B := \{\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}\}$ hat dann auch d die Darstellung

$$d_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

In etwas anderer Betrachtungsweise besagt dieser Satz folgendes: Im Falle von $\det d = 1$ handelt es sich bei $d \in \mathcal{O}(V)$ (auch geometrisch) um eine Drehung, im Falle von $\det d = -1$ um eine reine² Spiegelung.

2.1.2 Beispiel Für ein natürliches $n \geq 3$ betrachten wir ein regelmäßiges, im Ursprung zentriertes n -Eck. Eine Seite des n -Ecks stehe senkrecht auf der x -Achse und werde von ihr in deren positivem Bereich halbiert. In Abbildung 2.1 ist ein solches Vieleck für $n = 8$ dargestellt (vgl. auch Abbildung 2.2 auf Seite 15). Wir wollen die Menge der orthogonalen Transformationen genauer untersu-

Abbildung 2.1: Das regelmäßige n -Eck

chen, die das n -Eck in sich selbst überführen; offensichtlich handelt es sich dabei um eine Gruppe. Schnell erkennt man, daß neben n Drehungen (um die Winkel $k\frac{2\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n$) genau n Spiegelungen das Vieleck auf sich selbst abbilden: Die Spiegelungsebenen sind im Falle von n gerade $\frac{n}{2}$ Geraden, gegenüberliegende Seiten halbierend, und ebenso viele Geraden, gegenüberliegende Ecken verbindend; ist dagegen n ungerade, so verbindet jede der n Spiegelungsgeraden je eine Ecke mit der gegenüberliegenden Seitenmitte. Da offensichtlich keine weiteren Transformationen in $\mathcal{O}(V)$ gefunden werden können, die der geforderten Eigenschaft genügen, ist die Mächtigkeit der Gruppe gleich $2n$.

Es ist klar, daß jedes Element in dieser Gruppe eindeutig dadurch bestimmt ist, wie es die n Ecken des Polygons permutiert. Indem wir also die Ecken (o.B.d.A. entgegen dem Uhrzeigersinn, ausgehend von der im ersten Quadranten der x -Achse am nächsten gelegenen Ecke) von 1 bis n numerieren, können wir jedes Element als Permutation in der symmetrischen Gruppe $Sym(n)$ darstellen und unsere Gruppe als Untergruppe derselben betrachten. Die n Permutationen $\sigma^k := (1, 2, \dots, n)^k$, $k = 1, \dots, n$, entsprechen dann den Drehungen um

¹Es ist $(\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}) = 0$.

²Vergleiche dazu das Kapitel 3.

die Winkel $k\frac{2\pi}{n}$. Von den Spiegelungen wählen wir $\tau := (1, n)(2, n-1)\cdots$ aus und berechnen für die beiden Elemente σ und τ , die offensichtlich die Gruppe erzeugen, $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$ und $\sigma\tau\sigma\tau = 1$. Da wir schon wissen, daß die Gruppe die Mächtigkeit $2n$ besitzt, stellen diese Relationen definierende bezüglich den Erzeugern σ und τ dar. Diese Gruppe wird **Diedergruppe** genannt, Schreibweise³

$$\mathcal{D}_2^{2n} := \langle \sigma, \tau \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\},$$

wobei darauf hingewiesen sei, daß wir sie als Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$ betrachten, bestimmt durch die Lage des regelmäßigen n -Ecks. Dies bedeutet

$$\sigma_E = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alle Drehungen in \mathcal{D}_2^{2n} bilden eine Untergruppe vom Index 2 in der Diedergruppe,

$$\mathcal{C}_2^n := \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}\} \leq \mathcal{D}_2^{2n},$$

die **zyklisch** von der Ordnung n ist. Sie enthält alle Drehungen, die das regelmäßige n -Eck in sich selbst überführen.

Der Vollständigkeit halber definieren wir schließlich entsprechend $\mathcal{C}_2^1 := \{1\}$, $\mathcal{C}_2^2 := \{1, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$, sowie $\mathcal{D}_2^2 := \{1, \tau\}$ und $\mathcal{D}_2^4 := \{1, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau, \tau \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$. Auch hier gilt $[\mathcal{D}_2^{2n} : \mathcal{C}_2^n] = 2$.

Es stellt sich nun die Frage, welche endlichen Untergruppen es in $\mathcal{O}(V)$ noch gibt, oder ob bezüglich geometrischer Äquivalenz die beiden oben vorgestellten möglicherweise schon alle sind. Diesem Problem nähern wir uns, indem wir an eine beliebige endliche Gruppe $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(V)$ lediglich die Bedingung knüpfen, daß sie endlich sei. Wir werden untersuchen, wie diese Gruppe aussehen kann und dabei feststellen, daß es in zwei Dimensionen tatsächlich nur zwei verschiedene Typen von Gruppen gibt.

Aufgrund der Multiplikationsregel für Determinanten⁴ bilden die Drehungen eine Untergruppe \mathcal{H} von \mathcal{G} , für deren Mächtigkeit wir den Buchstaben n reservieren wollen. Für $\mathcal{H} \neq 1$ (also $n \geq 2$) wähle $1 \neq d \in \mathcal{H}$ mit minimalem θ im Sinne des Beweises zu Satz 2.1.1. Dann ist $\mathcal{H} = \langle d \rangle$ und $\theta = 2\pi/n$, denn:

Sei $\hat{d} \in \mathcal{H}$ mit zugehörigem $\hat{\theta}$, $\hat{d} \neq d$. Dann existiert infolge der Minimalität von θ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m\theta \leq \hat{\theta} < (m+1)\theta$, woraus $0 \leq \hat{\theta} - m\theta < \theta$ folgt. $\hat{\theta} - m\theta$ ist aber der zu $d^{-m}\hat{d} \in \mathcal{H}$ gehörige Winkel, aufgrund der Wahl von θ also gleich Null. Es folgt $d^{-m}\hat{d} = 1$, bzw. $\hat{d} = d^m$. Anschaulich klar ist damit auch die Beziehung $\theta = 2\pi/n$, d.h. $d = \sigma$ (σ wie in Beispiel 2.1.2).

Ist $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ (d.h. $\mathcal{G} \leq \mathcal{SO}(V)$), so haben wir gesehen, daß \mathcal{G} gleich der zyklischen Gruppe \mathcal{C}_2^n der Ordnung n ist. Dies gilt auch für $n = 1$, also $\mathcal{G} = 1$.

Im Falle von $\mathcal{G} \neq \mathcal{H}$ existiert dagegen ein $s \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$, und nach Satz 2.1.1 ist s eine Spiegelung. Weiterhin folgt $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] = 2$ (also insbesondere $\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{\mathcal{H}, s\mathcal{H}\}$), denn jedes weitere $t \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ ist in $s\mathcal{H}$ enthalten, da aus $\det(st) = 1$ die Beziehung $st \in \mathcal{H}$, also $t \in s^{-1}\mathcal{H} = s\mathcal{H}$ folgt. Damit ist insbesondere $|\mathcal{G}|$ gerade, $|\mathcal{G}| = 2n$, und \mathcal{G} enthält neben den n Drehungen in \mathcal{H} genau n Spiegelungen. Wir erkennen

³Erinnerung: Der Index steht für die Dimension des Vektorraumes, der Exponent für die Gruppenordnung.

⁴siehe Fischer [17], S.139

$\mathcal{G} = \langle d, s \rangle$, mit $\text{ord}(d) = \frac{n}{2}$ und $\text{ord}(s) = 2$. Wegen $\det(ds) = -1$ handelt es sich bei ds um eine Spiegelung, weshalb ferner $dsds = 1$ bzw. $ds = sd^{-1} = sd^{n-1}$ gilt, was die Multiplikation in \mathcal{G} eindeutig bestimmt:

$$\mathcal{G} = \langle d, s \rangle = \{1, d, d^2, \dots, d^{n-1}, s, sd, sd^2, \dots, sd^{n-1}\}.$$

Wieder gelten diese Überlegungen offensichtlich auch für den Fall $n = 1$.

Natürlich erwartet man, nicht zuletzt aufgrund der Präsentation von \mathcal{G} , daß \mathcal{G} zur Diedergruppe \mathcal{D}_2^{2n} geometrisch äquivalent ist. Da offensichtlich $b\sigma b^{-1} = d$ für alle $b \in \mathcal{SO}(V)$ gilt, müßten wir dazu lediglich noch zeigen, daß für eine beliebige Spiegelung $s \in \mathcal{O}(V)$, also $s_E = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, ein $b \in \mathcal{SO}(V)$ existiert mit $b\tau b^{-1} = s$ (τ wie in Beispiel 2.1.2). Wie man leicht nachrechnet, erfüllt $\tilde{b}_E := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ für $\phi = \frac{\varphi}{2}$ diese Forderung. \mathcal{G} und \mathcal{D}_2^{2n} sind also über $\tilde{b}\mathcal{D}_2^{2n}\tilde{b}^{-1} = \mathcal{G}$ in der Tat geometrisch äquivalent. Man könnte auch sagen: Dreht man das regelmäßige, im Ursprung zentrierte n -Eck um einen beliebigen Winkel, so erhält man eine zu \mathcal{D}_2^{2n} geometrisch äquivalente Gruppe.

Da die Gruppen \mathcal{C}_2^{2n} und \mathcal{D}_2^{2n} dagegen für alle $n \in \mathbb{N}$ geometrisch unterscheidbar sind – betrachte die Spuren der darstellenden Matrizen –, haben wir gezeigt:

2.1.3 Satz (Endl. Gruppen in 2D) *Eine endliche Gruppe $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(V)$ ist geometrisch äquivalent zu*

- einer zyklischen Gruppe \mathcal{C}_2^n , falls \mathcal{G} keine Spiegelung enthält,
- einer Diedergruppe \mathcal{D}_2^{2n} , falls \mathcal{G} eine Spiegelung enthält,

für ein $n \in \mathbb{N}$. □

2.2 Endliche Spiegelungsgruppen

Nach Satz 2.1.3 kommen als endliche Spiegelungsgruppen in zwei Dimensionen nur die Diedergruppen in Frage. Umgekehrt ist aber auch jede Diedergruppe \mathcal{D}_2^{2n} eine Spiegelungsgruppe:

Für $n = 1$ ist dies klar. Im Falle $n > 1$ wähle $\sigma, \tau \in \mathcal{D}_2^{2n}$ wie in Beispiel 2.1.2 und setze $\rho := \sigma\tau$. Dann ist ρ wegen $\det(\sigma\tau) = -1$ eine Spiegelung. Aus $\rho\tau = \sigma\tau\tau = \sigma$ folgt schließlich $\mathcal{D}_2^{2n} = \langle \tau, \rho \rangle$. Damit ist bewiesen:

2.2.1 Folgerung (Endl. Spiegelungsgruppen in 2D) *Die endlichen Spiegelungsgruppen der euklidischen Ebene sind (bis auf geometrische Äquivalenz) gerade die Diedergruppen \mathcal{D}_2^{2n} ($n \in \mathbb{N}$).* □

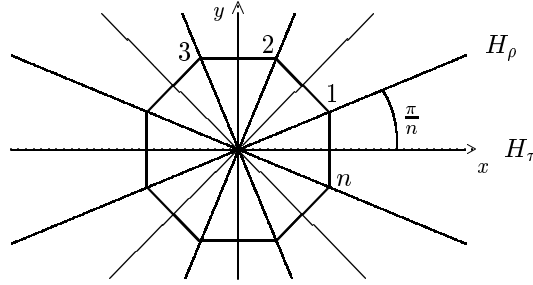
Wir wollen im folgenden die Identität $\rho\tau = \sigma$ noch ein wenig genauer betrachten. Von τ wissen wir, daß es die Spiegelung an der x -Achse beschreibt. Wegen

$$\rho_E = \sigma_E \tau_E = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & -\cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

handelt es sich bei ρ um die Spiegelung an der Geraden, die im ersten Quadranten mit der x -Achse einen Winkel von $\varphi = \frac{\pi}{n}$ einschließt⁵. Das Produkt dieser

⁵siehe Ende des Beweises zu Satz 2.1.1

beiden Spiegelungen, $\rho\tau$, ist dann die Drehung um $\frac{2\pi}{n} = 2 \cdot \varphi$, also den doppelten, von den beiden Spiegelungshypererebenen H_τ und H_ρ eingeschlossenen Winkel. (In Abbildung 2.2 ist der Fall $n = 8$ dargestellt. Es sind alle acht Spiegelungshypererebenen eingezeichnet, die das Polygon in sich selbst überführen.) Damit ist klar, daß allgemein das Produkt zweier Spiegelungen $s, s' \in \mathcal{O}(V)$ eine

Abbildung 2.2: Spiegelungshypererebenen im n -Eck

Drehung um den doppelten, von den zugehörigen Hypererebenen eingeschlossenen (kleineren) Winkel darstellt, entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn, je nach Reihenfolge der beiden Faktoren (beachte $(ss')^{-1} = s's$). Dies gilt sogar, wenn der eingeschlossene Winkel gleich π (bzw. 0) ist, d.h. die beiden Spiegelungen identisch sind: Eine Drehung um $2 \cdot \pi$ entspricht schließlich der Identität.

Es mag die Frage aufgekommen sein, ob jedes Paar von Spiegelungen aus einer Diedergruppe \mathcal{D}_2^n die ganze Gruppe erzeugt. Anhand unseres Beispiels $n = 8$ (Abbildung 2.2) erkennt man schon, daß dies keinesfalls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Spiegelungen zu je zwei aufeinander senkrecht stehenden Spiegelungsgeraden (wie etwa x - und y -Achse) erzeugen eine zu \mathcal{D}_2^4 geometrisch äquivalente Untergruppe, ein eingeschlossener Winkel von $\frac{\pi}{4}$ führt (wie beispielsweise bei x -Achse und Winkelhalbierender des 1. Quadranten) auf (geometrische Äquivalenz zu) \mathcal{D}_2^8 .

Wie die anschließende Folgerung zeigt, kann die eben gestellte Frage genau dann bejaht werden, wenn es sich bei n um eine Primzahl handelt.

2.2.2 Folgerung Seien $r, s \in \mathcal{O}(V)$ zwei Spiegelungen und θ der von ihren beiden Spiegelungshypererebenen eingeschlossene (kleinere) Winkel. Dann sind im Falle $\theta = \frac{k}{n}\pi$, für ein $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, die Gruppen $\langle r, s \rangle$ und \mathcal{D}_2^q geometrisch äquivalent, mit⁶ $q := \frac{n}{\text{ggT}(k, n)}$. Andernfalls ist $|\langle r, s \rangle|$ unendlich.

Beweis: Sei $\mathcal{G} := \langle r, s \rangle$. Wir betrachten zunächst den Fall $\theta = \frac{k\pi}{n}$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Offensichtlich ist dann \mathcal{G} geometrisch äquivalent zu einer Untergruppe der \mathcal{D}_2^{2n} , ja sogar zu einer Diedergruppe \mathcal{D}_2^{2m} für ein natürliches $m \leq n$, nach Satz 2.1.3.

Dank unseren Vorüberlegungen entspricht eines der beiden Produkte rs und sr einer Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel $2\frac{k\pi}{n}$. Sei dies o.B.d.A. $rs =: d$. Wegen $rd = s$ gilt nun $\mathcal{G} = \langle r, d \rangle$. Sicherlich erzeugt d die Untergruppe \mathcal{H} aller Drehungen in \mathcal{G} , da aus $rd = s$ auch hier $rd = d^{-1}r$ folgt. Aufgrund von $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] = 2$ bleibt also zu zeigen: $\text{ord}(d) = \frac{n}{\text{ggT}(k, n)}$. Dazu: $d^p = 1$ gilt für ein $p \in \mathbb{N}$ dann und genau dann, wenn $p \cdot \frac{k}{n} \in \mathbb{Z}$ ist. Kürzt man den Bruch

⁶ $\text{ggT}(a, b)$ steht für den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen a und b .

$\frac{k}{n}$ mit dem $\text{ggT}(k, n)$, so ist offensichtlich $q = \frac{n}{\text{ggT}(k, n)}$ die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft, woraus wie behauptet die geometrische Äquivalenz von \mathcal{G} und \mathcal{D}_2^{2q} folgt.

Der Fall $\theta \neq \frac{k\pi}{n}$ für jedwelche $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ führt zu einer unendlichen Gruppe $\langle r, s \rangle$, da z.B. die Ordnung von rs unendlich ist: Wir haben $c := \frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d.h. für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt $qc \notin \mathbb{Z}$. \square

Bemerkung: Im Sinne von Definition 1.1.2 operiert im übrigen von den zweidimensionalen endlichen Spiegelungsgruppen einzig \mathcal{D}_2^2 nicht wesentlich auf $V = \mathbb{R}^2$; ihr wesentlicher Anteil entspricht einer „Vorzeichenwechselfunktion“ auf \mathbb{R} , den man als (die einzige) endliche Spiegelungsgruppe in einer Dimension auffassen kann (Bezeichnung: \mathcal{D}_1^2).

Kapitel 3

Dreidimensionales

Sei in diesem Kapitel stets $\dim V = 3$ sowie $E := \{\epsilon_1 = (1, 0, 0), \epsilon_2 = (0, 1, 0), \epsilon_3 = (0, 0, 1)\}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^3 . Ähnlich wie in Kapitel 2 identifizieren wir V mit dem dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 .

3.1 Endliche Drehungsgruppen

Welche unterschiedlichen Arten von orthogonalen Transformationen können nun im \mathbb{R}^3 auftreten?

3.1.1 Satz Sei $t \in \mathcal{O}(V)$.

Dann existiert ein $\alpha \in V$ mit $t|_P$ ist Drehung ($P := (\mathbb{R}\alpha)^\perp$), und

- $t\alpha = \alpha$, falls t Drehung, oder
- $t\alpha = -\alpha$, falls $\det t = -1$.

Beweis: Die Eigenwerte von t seien mit λ_1, λ_2 und λ_3 bezeichnet. Da das charakteristische Polynom von t (ungeraden) Grad 3 besitzt, ist mindestens ein Eigenwert, o.B.d.A. λ_1 , reell¹. Ist ferner λ_2 irrational, so folgt $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$. Aufgrund der Längentreue in $\mathcal{O}(V)$ gilt zudem $|\lambda_i| = 1$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$.

Sei zunächst t eine Drehung, also $\det t = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Ist $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so auch λ_3 , und demnach $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{\pm 1\}$. Da $\det t = 1$, ist in jedem Fall ein Eigenwert gleich 1. Sei dieser λ_1 . Ist dagegen $\lambda_2 \notin \mathbb{R}$, so folgt $\lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = 1$, also wieder $\lambda_1 = 1$. Bezeichnet nun α einen Eigenvektor zu λ_1 , so operiert t auf $P := (\mathbb{R}\alpha)^\perp$, denn für $\mu \in P$ ist $(t\mu, \alpha) = (t^{-1}t\mu, t^{-1}\alpha) = (\mu, t^{-1}t\alpha) = (\mu, \alpha) = 0$. Diese Operation beschreibt aber nach Satz 2.1.1 eine Drehung in der Ebene P , ist doch $\det(t|_P) = \det t / \lambda_1 = 1$.

Zu betrachten ist nun noch der Fall $\det t = -1$. Wie eben zeigt man schnell, daß hier (mindestens) ein Eigenwert gleich -1 ist. Wir wählen dazu einen Eigenvektor α und setzen wieder $P := (\mathbb{R}\alpha)^\perp$; und wieder operiert t auf P als Drehung, da analog gilt: $(t\mu, \alpha) = 0$ für alle $\mu \in P$, sowie $\det(t|_P) = 1$. \square

¹Dies ist eine Konsequenz des Zwischenwertsatzes der Analysis.

Eine Drehung $d \in \mathcal{O}(V)$ besitzt also in einer entsprechenden Basis B von V bezüglich eines (eindeutigen) Winkels $\theta \in [0, 2\pi)$ eine Darstellung der Form

$$d_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

und stellt folglich eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um eine Ursprungsgerade um den Winkel θ dar.

Ist dagegen $t \in \mathcal{O}(V)$ mit $\det t = -1$, so existieren eine Basis B von V und ein (eindeutiger) Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ mit

$$t_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der geometrische Effekt von t ist also der einer Spiegelung an einer Hyperebene, gefolgt von einer Drehung um eine Achse durch den Ursprung senkrecht zur Ebene (oder umgekehrt, da die beiden Matrizen vertauschen). Nur, wenn $\theta = 0$ ist, handelt es sich bei t um eine Spiegelung im Sinne von Definition 1.1.4.

Auf dem Weg zu allen endlichen Spiegelungsgruppen wollen wir nun zunächst nur die endlichen Drehungsgruppen $\mathcal{G} \leq \mathcal{SO}(V)$ untersuchen². Dazu lassen wir \mathcal{G} auf folgender Menge S operieren:

Die Einheitskugel $\{\lambda \in V \mid (\lambda, \lambda) = 1\}$ wird von allen Elementen in \mathcal{G} auf sich selbst abgebildet. Jede Drehung $1 \neq d \in \mathcal{G}$ bestimmt aber nach Satz 3.1.1 genau zwei Punkte $\rho \in V$ auf dieser Kugeloberfläche mit der Eigenschaft $d\rho = \rho$; diese nennt man die **Pole** von d . Sie sind gerade die Schnittpunkte der Drehachse von d mit der Einheitskugel. Die Pole aller Elemente aus $\mathcal{G} \setminus \{1\}$ werden zur Menge S zusammengefaßt.

Es operiert \mathcal{G} auf S , denn: Sei $\rho \in S$ beliebig und $d \in \mathcal{G}$ eine zu ρ gehörige Drehung³. Für alle $t \in \mathcal{G}$ gilt dann $t\rho \in S$, da $t\rho$ wegen $(tdt^{-1})t\rho = td\rho = t\rho$ ein Pol der Drehung $tdt^{-1} \in \mathcal{G}$ ist.

Diese Operation von \mathcal{G} auf S lohnt eine genauere Untersuchung, schränkt sie doch die Anzahl der Bahnen und die zugehörigen Bahnlängen im Zusammenspiel mit der Gruppenmächtigkeit stark ein:

3.1.2 Satz *Jede endliche Drehungsgruppe $1 \neq \mathcal{G} \leq \mathcal{SO}(V)$ hat bezüglich der eben beschriebenen Operation auf der Menge S der Pole von \mathcal{G} die Daten einer der Zeilen aus der folgenden Tabelle:*

$ \mathcal{G} $	Bahnen	Bahnlängen		
n	2	1	1	
$2n$	3	n	n	2
12	3	6	4	4
24	3	12	8	6
60	3	30	20	12

Dabei ist $n \geq 2$.

²Bei genauerer Betrachtung des Beweises zu Satz 2.1.3 entspricht dies auch der Vorgehensweise im Zweidimensionalen.

³d.h. ρ ist ein Pol von d

Beweis: Sei $|\mathcal{G}| = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Für jeden Pol $\rho \in S$ setzen wir zunächst $\beta_\rho := |\mathcal{G}\rho|$ (Bahnlänge von ρ) und $\sigma_\rho := |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(\rho)|$ (Mächtigkeit des Stabilisators von ρ in \mathcal{G}). Allgemein⁴ gilt dann $n = \beta_\rho \sigma_\rho$ für alle $\rho \in S$.

Ferner definieren wir $U := \{(d, \rho) \mid 1 \neq d \in \mathcal{G}, \rho \in S \text{ ist Pol von } d\}$ als die Menge all dieser geordneten Paare (d, ρ) . Dann ist

$$|U| = 2(|\mathcal{G}| - 1) = 2(n - 1).$$

Man kann $|U|$ aber auch über einen anderen Weg berechnen: Selbstverständlich stabilisiert eine Drehung $1 \neq d \in \mathcal{G}$ einen Pol $\rho \in S$ genau dann, wenn ρ ein Pol von d selbst ist. Also folgt $|U| = \sum_{\rho \in S} (\sigma_\rho - 1)$, und wir haben tatsächlich kein Element aus U mehrmals gezählt. Sei $\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ ($k := |S| \in \mathbb{N}$) ein Vertretersystem der \mathcal{G} -Bahnen von S . Dann gilt

$$|U| = \sum_{i=1}^k \beta_{\rho_i} (\sigma_{\rho_i} - 1) = \sum_{i=1}^k (n - \beta_{\rho_i}),$$

denn für alle $\rho \in \mathcal{G}\rho_i$ ist $\sigma_\rho = \sigma_{\rho_i}$. Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Division durch n liefert

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{\beta_{\rho_i}}{n}\right). \quad (*)$$

Wegen $n > 1$ gilt für die linke Seite von $(*)$ $1 \leq 2 - 2/n < 2$. Da neben einer zu jedem ρ_i gehörigen Drehung auch die Identität in \mathcal{G} diesen Pol stabilisiert, ist $\sigma_{\rho_i} \geq 2$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Deshalb erhalten wir für jedes i auf der rechten Seite von $(*)$ die Ungleichung $1/2 \leq 1 - 1/\sigma_{\rho_i} < 1$. Folglich ist $k \in \{2, 3\}$.

Sei zunächst $k = 2$. Gleichung $(*)$ vereinfacht sich damit zu $2 - 2/n = (1 - \beta_{\rho_1}/n) + (1 - \beta_{\rho_2}/n)$ oder, umgeformt, zu $2 = \beta_{\rho_1} + \beta_{\rho_2}$. Es folgt $\beta_{\rho_1} = \beta_{\rho_2} = 1$ (Zeile 1 der Tabelle).

Sei jetzt $k = 3$ und o.B.d.A. $\sigma_{\rho_1} \leq \sigma_{\rho_2} \leq \sigma_{\rho_3}$. Angenommen, $\sigma_{\rho_1} \geq 3$. Dann wäre $\sum_{i=1}^3 (1 - 1/\sigma_{\rho_i}) \geq \sum_{i=1}^3 (1 - 1/3) = 2$ (Widerspruch); folglich ist $\sigma_{\rho_1} = 2$, und Gleichung $(*)$ vereinfacht sich zu $2 - 2/n = 1/2 + (1 - \beta_{\rho_2}/n) + (1 - \beta_{\rho_3}/n)$ oder, umgeschrieben, zu

$$1/2 + 2/n = 1/\sigma_{\rho_2} + 1/\sigma_{\rho_3}. \quad (**)$$

Da hier die linke Seite größer als $1/2$ ist, muß $\sigma_{\rho_2} < 4$ sein, also gleich 2 oder 3.

Ist $\sigma_{\rho_2} = 2$, so folgt $\sigma_{\rho_3} = n/2$, also $\beta_{\rho_1} = \beta_{\rho_2} = n/2$, $\beta_{\rho_3} = 2$, und insbesondere ist n gerade sowie größer gleich vier, da \mathcal{G} mindestens zwei Drehungen und die Identität enthält, ist doch die Anzahl der Pole mindestens gleich Vier (Zeile 2 der Tabelle).

Es bleibt der Fall $\sigma_{\rho_2} = 3$. Die Gleichung $(**)$ vereinfacht sich zu

$$1/6 + 2/n = 1/\sigma_{\rho_3}.$$

Offensichtlich ist $\sigma_{\rho_3} \leq 5$.

Für $\sigma_{\rho_3} = 3$ ist $n = 12$, $\beta_{\rho_1} = 6$ und $\beta_{\rho_2} = \beta_{\rho_3} = 4$ (Zeile 3 der Tabelle).

Einsetzen von $\sigma_{\rho_3} = 4$ liefert $n = 24$, $\beta_{\rho_1} = 12$, $\beta_{\rho_2} = 8$ und $\beta_{\rho_3} = 6$ (Zeile 4 der Tabelle).

⁴siehe Meyberg [29], Satz 2.1.5., S.67

Die Wahl $\sigma_{\rho_3} = 5$ schließt den Beweis ab mit dem Ergebnis $n = 60$, $\beta_{\rho_1} = 30$, $\beta_{\rho_2} = 20$ und $\beta_{\rho_3} = 12$ (Zeile 5 der Tabelle). \square

Nun werden wir uns für jeden der fünf Fälle aus Satz 3.1.2 auf die Suche nach endlichen Drehungsgruppen machen und dabei (bis auf geometrische Äquivalenz) immer genau eine Gruppe finden. Anschaulich liegt dies daran, daß die geforderte Endlichkeit der Gruppen der Lage ihrer Drehachsen eine äußerst strenge Symmetrie aufzwingt. Es existieren also Gruppen, die die Daten der Tabelle aus Satz 3.1.2 erfüllen, und andersherum legen die Tabellendaten die jeweilige Gruppe eindeutig fest. Gehen wir die Tabelle der Reihe nach durch; \mathcal{G} sei immer eine Gruppe mit den Daten der gerade besprochenen Zeile:

• **Zeile 1:** Nach kürzester Überlegung (eine einzige Drehachse in \mathcal{G} !) wird deutlich: Es handelt sich um die triviale Fortsetzung der Gruppe \mathcal{C}_2^n ; eine Drehung $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2^n$ wird folgendermaßen in eine Drehung im \mathbb{R}^3 „übersetzt“:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Der zweidimensionale euklidische Raum wird dabei in natürlicher Weise als Unterraum des dreidimensionalen aufgefaßt. Die neuentstandene Gruppe ist selbstverständlich isomorph zu \mathcal{C}_2^n , unterscheidet sich aber geometrisch von dieser (vgl. Definition 1.1.1) allein schon aufgrund unterschiedlicher Vektorraumdimensionen. Sie operiert auch nicht wesentlich auf dem \mathbb{R}^3 ; die Gruppe \mathcal{C}_2^n stellt ihren wesentlichen Anteil dar. Wir bezeichnen sie deshalb mit \mathcal{C}_3^n . Da diese Überlegung auch für $n = 1$ zutrifft, setzen wir entsprechend $\mathcal{C}_3^1 := \{1\} \leq \mathcal{SO}(V)$.

• **Zeile 2:** Sei ρ_3 ein Vertreter der \mathcal{G} -Bahn der Länge 2. Allgemein ist bei endlichen Drehungsgruppen der Stabilisator eines Poles ρ zyklisch, erzeugt von einer Drehung um den Winkel $2\pi/|\text{Stab}_{\mathcal{G}}(\rho)|$, da, wie bereits im Beweis zu Satz 3.1.2 erwähnt, eine Drehung ungleich der Identität einen Pol nur dann stabilisiert, wenn dieser einer der beiden Pole der Drehung selbst ist⁵. Auch $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(\rho_3)$ ist also zyklisch, erzeugt von einer Drehung d um $2\pi/n$.

Sei zunächst $n > 2$. Dann ist der zweite Pol dieser Drehung⁶, blickt man wieder auf die Tabelle, das zweite Element der \mathcal{G} -Bahn von ρ_3 . Alle Elemente $f \in \mathcal{G} \setminus \text{Stab}_{\mathcal{G}}(\rho_3)$ stellen demzufolge eine Drehung um π dar, da sie Stabilisatoren der Mächtigkeit 2 angehören. Das Produkt $df =: t$ ist dann ebenfalls eine Drehung um π , denn es ist $t \notin \text{Stab}_{\mathcal{G}}(\rho_3)$. Da tf die Drehung d um $2\pi/n$ ergibt, müssen sich die Drehachsen von t und f unter einem Winkel von π/n schneiden, in einer Ebene senkrecht zur Achse von d . Dies macht man sich anschaulich schnell klar. Aufgrund der Bahnlängen erhält man demzufolge als „Bild“ dieser Gruppe eine Ebene, in der n Drehachsen liegen, die zu π -Drehungen gehören (Winkel zwischen zwei benachbarten jeweils π/n), sowie einer $2\pi/n$ -Achse senkrecht dazu. Geometrisch ist die Gruppe damit eindeutig festgelegt.

Dies ist auch das Ergebnis im Falle $n = 2$ ($|\mathcal{G}| = 4$); in der Ebene liegen hier genau zwei π -Achsen f und $df =: t$, d.h. die Gruppe beinhaltet drei gleichberechtigte, aufeinander senkrechte Drehachsen (und ist isomorph zur Kleinschen Vierergruppe \mathcal{V}_4).

⁵Beachte auch Beweis zu Satz 2.1.3 in bezug auf die Zyklizität.

⁶Stabilisatormächtigkeit dieses Poles muß gleich n sein

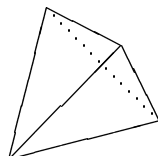
Da die Mächtigkeit der Gruppe gleich $2n(n \geq 2)$ ist, ist sie von d und f erzeugt. Nach den vorausgegangenen Überlegungen gilt ferner $\text{ord}(d) = n$, $\text{ord}(f) = 2$ und $dfdf = 1$. Man ist an die Diedergruppe \mathcal{D}_2^{2n} erinnert, und nicht von ungefähr kommt diese Assoziation: Setzt man die Drehungen aus \mathcal{D}_2^{2n} fort wie in „Zeile 1“, sowie die Spiegelungen in der Art

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

so daß sie im \mathbb{R}^3 Drehungen um π werden, so erhält man exakt die oben geforderte Gruppe⁷. Sie sei mit \mathcal{D}_3^{2n} bezeichnet, um die Entstehungsweise aus der zweidimensionalen Diedergruppe \mathcal{D}_2^{2n} zu verdeutlichen. Überdies sind die beiden Gruppen über (3.1) und (3.2) isomorph. (All dies gilt auch für $n=2$. Und natürlich sind \mathcal{V}_4 und \mathcal{D}_3^4 (und \mathcal{D}_2^4) isomorph.)

• **Zeile 3:** Seien ρ_1, \dots, ρ_4 die (selbstverständlich verschiedenen) Pole einer der beiden vierelementigen \mathcal{G} -Bahnen. Wähle eine $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(\rho_1)$ erzeugende Drehung $d \in \mathcal{G}$ und einen Pol ρ_i , $i \in \{2, 3, 4\}$, mit $\|\rho_1 - \rho_i\| < 2$. Dann sind $d\rho_i$, $d^2\rho_i$ und $d^3\rho_i$ alle verschieden. Da d Abstände er- und die Drehachse von d den Pol ρ_1 enthält, liegen die drei anderen Pole auf einem gleichseitigen Dreieck, und jede der drei Ecken hat gleichen Abstand zu ρ_1 . Spielt man diese Überlegung anstelle von ρ_1 mit ρ_i durch, so erkennt man, daß der Abstand zwischen *allen* Polen gleich groß ist. Sie bilden deshalb die Ecken eines regulären, im Ursprung zentrierten Tetraeders.

Abbildung 3.1: Das Tetraeder



Selbstverständlich operiert die Gruppe transitiv auf jeder ihrer Bahnen, also auch auf der ausgewählten. Das bedeutet, daß jedes Element der Gruppe das Tetraeder in sich selbst überführt. Sie ist demnach eine Untergruppe derjenigen Gruppe \mathcal{T} , die aus allen Drehungen in $\mathcal{SO}(V)$ besteht, die das Tetraeder auf sich selbst abbilden. Betrachten wir diese Gruppe also genauer:

Dreht und wendet man ein Modell eines regulären Tetraeders in den Händen und jongliert mit Drehachsen und Drehwinkeln im Kopf, so stellt man bald fest, daß nur die folgenden zwölf Drehungen das Tetraeder in sich selbst überführen:

Die Verbindungsgerade von jeweils einem der vier Seitenmittelpunkte mit der gegenüberliegenden Ecke liefert vier $2\pi/3$ -Drehachsen (also jeweils eine Drehung um $2\pi/3$ sowie eine um $4\pi/3$).

Verbindet man dagegen zwei gegenüberliegende Kantenmitten geradlinig, so erkennt man in jedem der drei Fälle eine π -Achse.

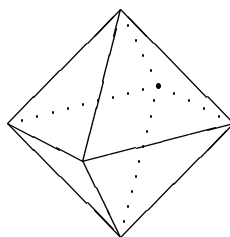
⁷Man verifiziert leicht, daß sie in sich abgeschlossen ist.

Zusammen mit der Identität ist also $|\mathcal{T}| = 2 \cdot 4 + 3 + 1 = 12$, und unsere Ausgangsgruppe *ist* die Drehungsgruppe \mathcal{T} eines regulären Tetraeders, d.h. geometrisch äquivalent zu jeder Drehungsgruppe eines anderen regulären, im Ursprung zentrierten Tetraeders (vgl. Definition 1.1.1).

• **Zeile 4:** Wählen wir zunächst einen Vertreter ρ der sechselementigen \mathcal{G} -Bahn. Sei $d \in \mathcal{G}$ mit $\langle d \rangle = \text{Stab}_{\mathcal{G}}(\rho)$, also von der Ordnung 4. In disjunkter Zykelschreibweise zur symmetrischen Gruppe $\text{Sym}(6)$ gedacht⁸, muß d einem Viererzykel entsprechen, also vier der anderen fünf Pole dieser Bahn zyklisch vertauschen (d entspricht einer Drehung um $\pi/2$), sowie den verbleibenden festhalten, welcher folglich der zweite Pol von d ist. Die vier permutierten bilden die Ecken eines Quadrates (mit Mittelpunkt auf der Verbindungsstrecke von ρ und seinem Gegenüber).

Betrachtet man analog die beiden noch verbleibenden Paare von Polen in dieser \mathcal{G} -Bahn, so erhält man identische Ergebnisse, lediglich mit entsprechend vertauschten Rollen. Die sechs Pole bilden demnach die Ecken eines regulären, im Ursprung zentrierten Oktaeders.

Abbildung 3.2: Das Oktaeder



Hier ist \mathcal{G} also eine Untergruppe der Gruppe $\mathcal{O} \leq \mathcal{SO}(V)$ aller Drehungen, die ein reguläres, im Ursprung zentriertes Oktaeder in sich selbst überführen. In \mathcal{O} findet man folgende Elemente (Drehachsen):

Die drei schon beschriebenen $\pi/2$ -Achsen durch je zwei gegenüberliegende Eckpunkte, vier $2\pi/3$ -Achsen durch je zwei gegenüberliegende Seitenmittelpunkte, sechs π -Achsen durch je zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte sowie die Identität.

Insgesamt besteht die Oktaedergruppe also aus $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 + 1 = 24$ Elementen. In Analogie zu „Zeile 3“ *ist* \mathcal{G} die Oktaedergruppe.

• **Zeile 5:** Auch hier richten wir unser Augenmerk auf eine bestimmte \mathcal{G} -Bahn, die zwölfelementige. Der Stabilisator eines jeden dieser Pole hat Mächtigkeit fünf. Überlegungen in der $\text{Sym}(12)$ (vgl. „Zeile 4“) ergeben, daß jeweils zwei der Pole zu einer von sechs $2\pi/5$ -Drehungen gehören: Erzeugende der Stabilisatoren sind das Produkt zweier disjunkter Fünferzykel.

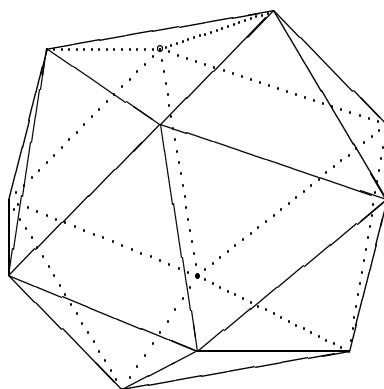
Eine beliebige dieser Drehungen, d , lege die Rotationsachse der Einheitskugel fest; die beiden Pole stellen wir uns entsprechend als Nord- und Südpol unserer „Erde“ vor. Die Menge der anderen zehn Pole zerfällt in zwei d -Bahnen von je

⁸ \mathcal{G} operiert treu auf ${}^{\mathcal{G}}\rho$ und ist deshalb isomorph zu einer Untergruppe der $\text{Sym}(6)$ (Konsequenz aus dem Satz von Cayley, siehe Adkins [1], S.23).

fünf Elementen. Nicht alle zehn befinden sich auf dem Äquator: Es gäbe sonst eine Drehung um $2\pi/5$, deren Pole auf dem Äquator ruhten. Sie würde aber die anderen acht Äquatorpole weder auf den Äquator selbst noch auf Nord- oder Südpol abbilden.

Da sich immer zwei Pole genau gegenüberliegen, gilt diese Überlegung auch für jeden anderen Breitengrad. Deshalb befinden sich auf einem „nördlichen“ und einem „südlichen“ Breitengrad je fünf Pole, die dort zwei regelmäßige Fünfecke markieren. Vertauschungen der Rollen auf der Erdoberfläche zeigen schließlich, daß jeder der zwölf Pole zu seinen nahegelegensten fünf Nachbarn gleichen Abstand hat. Alle zusammen bilden sie ein reguläres Ikosaeder.

Abbildung 3.3: Das Ikosaeder



Unsere Gruppe ist somit eine Untergruppe der Ikosaedergruppe $\mathcal{I} \leq \mathcal{SO}(V)$, welche wieder aus all den Drehungen bestehe, die ein reguläres, im Ursprung zentriertes Ikosaeder in sich selbst überführen. Schauen wir auch diese Gruppe genauer an; ein Modell eines Ikosaeders ist dabei sehr von Nutzen. Wir finden folgende Drehachsen:

Die beschriebenen sechs $2\pi/5$ -Achsen (jeweils zwei gegenüberliegende Ecken verbindend), zehn $2\pi/3$ -Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten sowie fünfzehn π -Achsen, die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten verbindend. Zusammen mit der Identität ist demzufolge $|\mathcal{I}| = 6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 15 + 1 = 60$ und also \mathcal{G} die Ikosaedergruppe.

Bemerkung: Bei allen vorgestellten Gruppen war die Anschauung Ausgangspunkt, die Symmetrien der Körper. Exakte Beweise für die Existenz der Gruppen \mathcal{T} , \mathcal{O} und \mathcal{I} wurden nicht erbracht: Es ist beispielsweise keineswegs offensichtlich, daß es ein Ikosaeder gibt. Später (in Teil II) werden wir die konkrete Anschauung verlassen und dabei dieselben Ergebnisse erhalten und auch beweisen. Der kritische Leser möge sich noch ein wenig gedulden – oder schon jetzt zu Kapitel 8 (Abschnitt 3) blättern.

In den Zeilen 1 bis 5 haben wir also „gezeigt“:

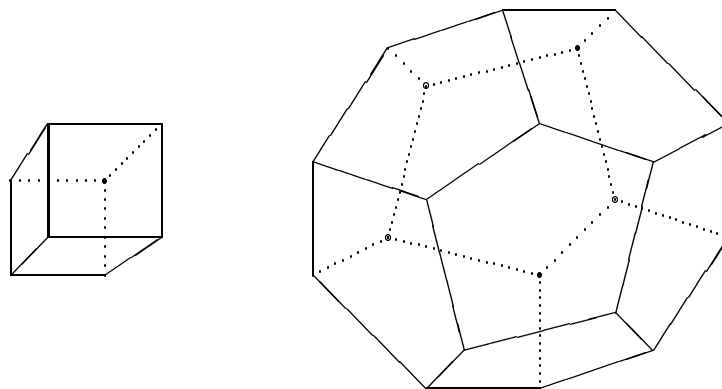
3.1.3 Satz (Endl. Drehungsgruppen in 3D) Sei $\dim V = 3$ und $n \in \mathbb{N}$. Alle endlichen Untergruppen von $\mathcal{SO}(V)$ sind die folgenden:

$$\mathcal{C}_3^n (n \geq 1); \quad \mathcal{D}_3^{2n} (n \geq 2); \quad \mathcal{T}; \quad \mathcal{O}; \quad \mathcal{I}.$$

□

Der aufmerksamen Leserin mag aufgefallen sein, daß im Zweidimensionalen zu *jedem* regelmäßigen n -Eck eine Drehungsgruppe existiert, im Dreidimensionalen dagegen scheinbar nicht zu jedem regelmäßigen Polyeder. Neben Tetra-, Okta- und Ikosaeder gibt es noch folgende zwei (konvexe), aus gleichen, regelmäßigen n -Ecken aufgebaute: Würfel und Dodekaeder. Zusammen

Abbildung 3.4: Würfel und Dodekaeder



bilden sie die fünf schon den griechischen Naturphilosophen bekannten **platonischen Körper**. Weitere gibt es nicht, wie Winkelbetrachtungen, angewandt auf von einem beliebigen Eckpunkt ausgehende Kanten, zeigen (siehe *Historisches/Ausblick* auf Seite 97). Würfel wie Dodekaeder besitzen ebenfalls endliche Drehungsgruppen, man überlege sich das anhand von Modellen der beiden Körper.

Der „Fehler“ in der eingangs gemachten Annahme liegt an der *Dualität* der platonischen Körper: Es läßt sich ein Würfel in einem Oktaeder durch Verbindung dessen Seitenmitten einbeschreiben und umgekehrt. Da die Drehungsgruppen von Würfel und Oktaeder auch die Seitenmittelpunkte ineinander überführen, sind sie jeweils Untergruppen voneinander, also gleich. Selbiges gilt für Dodekaeder und Ikosaeder. Das Tetraeder ist dual zu sich selbst.

3.2 Endliche Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$

Es wird sich bald herausstellen, daß sich *alle* (bezüglich unseres Äquivalenzbegriffes) endlichen Untergruppen $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(V)$ aus den in Satz 3.1.3 aufgelisteten endlichen Drehungsgruppen konstruieren lassen. Fassen wir einmal alle Drehungen in \mathcal{G} zu einer Menge \mathcal{H} zusammen. Dann ist $\mathcal{H} \neq \emptyset$, da $1 \in \mathcal{H}$. Nach der

Determinantenmultiplikationsregel bildet \mathcal{H} zudem eine Untergruppe von \mathcal{G} . Der folgende Satz gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(V)$ und der darin enthaltenen Drehungsgruppe $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ wieder:

3.2.1 Satz *Sei $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(V)$ endlich, sowie $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ die eben beschriebene Untergruppe aller Drehungen in \mathcal{G} . Dann ist entweder $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ oder $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] = 2$.*

Beweis: Alle Fälle $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ sind in Satz 3.1.3 abgehandelt. Sei also $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$. Wähle ein beliebiges Element $t \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$. Dann gilt für alle $s \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$: $t^{-1}s \in \mathcal{H}$, da $\det(t^{-1}s) = (-1)^2 = 1$. Folglich ist $s \in t\mathcal{H}$ und also $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup t\mathcal{H}$. \square

Von Interesse ist jetzt der Fall $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] = 2$. (Die eingeführte Notation wird im folgenden beibehalten werden.) Wir werden sehen, daß die Menge dieser endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$ bezüglich einer Beziehung zu den endlichen Drehungsgruppen in zwei Mengen zerfällt: Eine, in der sich diejenigen Gruppen befinden, die die -1 enthalten, und eine andere, das logische Gegenteil der ersten. Die aufgeführten Gruppen \mathcal{G} , \mathcal{H} und \mathcal{K} seien, wie immer, endlich. Als erstes zeigen wir, daß die beiden Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} M_1 := \{\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(V) \mid -1 \in \mathcal{G}\} & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & \{\mathcal{H} \mid \mathcal{H} \leq \mathcal{SO}(V)\} =: M_2 \\ \mathcal{G} & \longmapsto & \mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V) \\ \mathcal{H} \cup (-1)\mathcal{H} & \longleftarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

inverse Bijektionen sind.

Wohldefiniertheit: α ist wohldefiniert nach Satz 3.2.1. Sei umgekehrt $\mathcal{H} \leq \mathcal{SO}(V)$ beliebig. Wir verifizieren im folgenden, daß $\beta(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup (-1)\mathcal{H}$ eine Gruppe ist, wobei $(-1) \in \beta(\mathcal{H})$ klar ist. Dazu: • $1 \in \mathcal{H}$, also $1 \in \beta(\mathcal{H})$. • Sei $t \in \beta(\mathcal{H})$. Dann ist auch $t^{-1} \in \beta(\mathcal{H})$: Im Falle $t \in \mathcal{H}$ ist dies trivial. Im Falle $t \in \beta(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H}$ folgt zunächst $(-1)t \in \mathcal{H}$, daraus $((-1)t)^{-1} \in \mathcal{H}$, also $t^{-1}(-1)^{-1} = t^{-1}(-1) = (-1)t^{-1} \in \mathcal{H}$; dies ist äquivalent zu $t^{-1} \in (-1)\mathcal{H} \subset \beta(\mathcal{H})$. • Seien zuletzt $s, t \in \beta(\mathcal{H})$. Dann ist $st \in \beta(\mathcal{H})$, denn: Für $s, t \in \mathcal{H}$ ist dies trivial; sind $s, t \in \beta(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H}$, also $(-1)s, (-1)t \in \mathcal{H}$, so folgt $(-1)s(-1)t = st \in \mathcal{H} \subset \beta(\mathcal{H})$; ist $s \in \mathcal{H}$ und $t \in \beta(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H}$ (oder umgekehrt), so gilt $(-1)st \in \mathcal{H}$, und wir schließen ab mit $st \in (-1)\mathcal{H} \subset \beta(\mathcal{H})$.

Inverse Bijektionen: Sei $\mathcal{G} \in M_1$ und $\mathcal{H} := \mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V)$. Dann gilt nach Satz 3.2.1 $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup (-1)\mathcal{H}$, also $(\beta \circ \alpha)(\mathcal{G}) = \beta(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup (-1)\mathcal{H} = \mathcal{G}$. Ist umgekehrt $\mathcal{H} \in M_2$, so erhält man aufgrund von $(-1)\mathcal{H} \cap \mathcal{SO}(V) = \emptyset$ zuletzt $(\alpha \circ \beta)(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, und wir sind fertig.

Hinter dem Fall $-1 \notin \mathcal{G}$ verbirgt sich ein ähnliches Resultat. Hier bilden die beiden Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} N_1 := \{\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(V) \mid -1 \notin \mathcal{G}, \\ \mathcal{G} \not\leq \mathcal{SO}(V)\} & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & \{(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \mid \mathcal{H} < \mathcal{K} \leq \mathcal{SO}(V), \\ & & [\mathcal{K} : \mathcal{H}] = 2\} =: N_2 \\ \mathcal{G} & \longmapsto & (\mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V), (\mathcal{G} \cup (-1)\mathcal{G}) \cap \mathcal{SO}(V)) \\ \mathcal{H} \cup (-1)(\mathcal{K} \setminus \mathcal{H}) & \longleftarrow & (\mathcal{H}, \mathcal{K}) \end{array}$$

inverse Bijektionen:

Wohldefiniertheit von $\tilde{\alpha}$: Sei $\mathcal{G} \in N_1$. Nach Satz 3.2.1 ist $\mathcal{H} := \mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V)$ eine Gruppe. Als nächstes zeigen wir, daß es sich auch bei $U := (\mathcal{G} \cup (-1)\mathcal{G}) \cap \mathcal{SO}(V)$ um eine Gruppe handelt. Dazu: Offensichtlich gilt $U = \mathcal{H} \cup [((-1)\mathcal{G}) \setminus \mathcal{H}] = \mathcal{H} \cup (-1)t\mathcal{H}$ für jedes $t \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ (und damit insbesondere $\mathcal{H} \subset U$ und $|U|/|\mathcal{H}| = 2$). Daran erkennt man jetzt (es sei $t \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$): • $1 \in \mathcal{H} \subset U$. • Ist $s \in \mathcal{H}$, so folgt natürlich $s^{-1} \in U$; ist $s \in U \setminus \mathcal{H}$, so gilt wegen $t^{-1} \in t\mathcal{H}$: $s \in U \setminus \mathcal{H} \iff t^{-1}(-1)s \in \mathcal{H} \iff s^{-1}(-1)t \in \mathcal{H} \iff (-1)s^{-1} \in \mathcal{H}t^{-1} = t\mathcal{H} \iff s^{-1} \in U \setminus \mathcal{H}$. • Durch Fallunterscheidung zeigt man schnell auch $s_1s_2 \in U \forall s_1, s_2 \in U$.

Wohldefiniertheit von $\tilde{\beta}$: Sei $(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \in N_2$ und $U := \tilde{\beta}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Um zu zeigen, daß U eine Gruppe ist, wählen wir ein beliebiges $k \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{H}$ und schreiben $U = \mathcal{H} \cup (-1)k\mathcal{H}$. Dann gilt: • $1 \in \mathcal{H} \subset U$. • Für alle $t \in U$ gilt: $t^{-1} \in U$, was im Falle $t \in \mathcal{H}$ trivial ist, im Falle $t \in U \setminus \mathcal{H}$ dagegen aus $k^{-1} \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{H}$ folgt: $t \in U \setminus \mathcal{H} = (-1)k\mathcal{H} \iff t \in \mathcal{H}k^{-1}(-1) \iff t(-1)k \in \mathcal{H} \iff k^{-1}(-1)t^{-1} \in \mathcal{H} \iff t^{-1} \in (-1)k\mathcal{H}$. • Schließlich verifiziert man wieder leicht mittels Fallunterscheidung $st \in U$ für alle $s, t \in U$. Somit ist $U \leq \mathcal{O}(V)$ gezeigt. $U \not\leq \mathcal{SO}(V)$ und $-1 \notin U$ ist klar.

Inverse Bijektionen: Sei zunächst $\mathcal{G} \in N_1$. Wir setzen $X := \mathcal{G} \cup (-1)\mathcal{G}$ und $\mathcal{H} := \mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V)$. Dann gilt $(\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha})(\mathcal{G}) = \tilde{\beta}(\mathcal{H}, X \cap \mathcal{SO}(V)) = \mathcal{H} \cup (-1)[(X \cap \mathcal{SO}(V)) \setminus \mathcal{H}] = \mathcal{H} \cup (-1)[((-1)\mathcal{G}) \cap \mathcal{SO}(V)] = \mathcal{G}$. Für $(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \in N_2$ erkennen wir mit Hilfe von $Y := (-1)(\mathcal{K} \setminus \mathcal{H})$: $(\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta})(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \tilde{\alpha}(\mathcal{H} \cup Y) = ([\mathcal{H} \cup Y] \cap \mathcal{SO}(V)) \cup (-1)([\mathcal{H} \cup Y] \cap \mathcal{SO}(V)) = (\mathcal{H}, \mathcal{H} \cup \mathcal{K} \setminus \mathcal{H}) = (\mathcal{H}, \mathcal{K})$, was den Beweis abschließt.

Die beiden beschriebenen Paare inverser Bijektionen zeigen uns den Weg zu allen endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$, geben sie doch an, wie wir letztere aus den endlichen Drehungsgruppen konstruieren können.

Abbildung β sagt: Jede endliche Drehungsgruppe \mathcal{H} wird durch Hinzunahme der Menge $(-1)\mathcal{H}$ eine Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$; wir wollen diese Gruppe mit \mathcal{H}^* bezeichnen. Da α bijektiv invers zu β ist, erhalten wir auf diese Weise alle endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$, die das Element -1 enthalten.

Abbildung $\tilde{\beta}$ sagt: Jede endliche Drehungsgruppe \mathcal{H} , die in einer endlichen Drehungsgruppe \mathcal{K} enthalten ist, mit $[\mathcal{K} : \mathcal{H}] = 2$, wird durch Hinzunahme der Menge $(-1)(\mathcal{K} \setminus \mathcal{H})$ eine Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$; diese wollen wir mit $[\mathcal{K}]\mathcal{H}$ abkürzen. Hier erkennen wir anhand der inversen Abbildung $\tilde{\alpha}$, daß uns diese Konstruktion alle endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$ liefert, die zwar die -1 nicht enthalten, aber dennoch keine Untergruppen von $\mathcal{SO}(V)$ sind.

Die Wahl von M_1 und N_1 macht deutlich, daß auf diese beiden Arten alle endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$ erhalten werden, die keine reinen Drehungsgruppen sind. Die Menge der endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$ zerfällt somit in drei disjunkte Teilmengen, deren Elemente folgenden drei Typen endlicher Gruppen entsprechen:

- $\mathcal{H} \leq \mathcal{SO}(V)$,
- $\mathcal{H}^* := \mathcal{H} \cup (-1)\mathcal{H}$, mit $\mathcal{H} \leq \mathcal{SO}(V)$,
- $[\mathcal{K}]\mathcal{H} := \mathcal{H} \cup (-1)(\mathcal{K} \setminus \mathcal{H})$, mit $\mathcal{H} < \mathcal{K} \leq \mathcal{SO}(V)$ und $[\mathcal{K} : \mathcal{H}] = 2$.

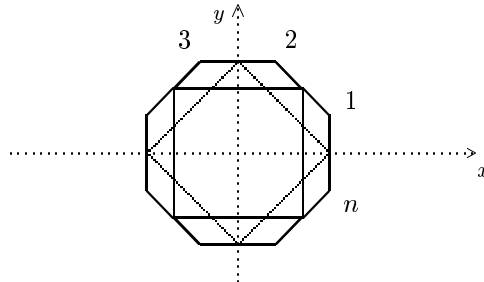
Was uns im Moment noch fehlt ist also einzig und allein die Kenntnis aller Paare $(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ mit $\mathcal{H} < \mathcal{K} \leq \mathcal{SO}(V)$ und $[\mathcal{K} : \mathcal{H}] = 2$, um alle endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$ in drei Dimensionen angeben zu können. Gehen wir deshalb die Drehungsgruppen aus Satz 3.1.3 der Reihe nach durch:

- \mathcal{C}_3^n enthält nur im Falle von n gerade die Untergruppe $\mathcal{C}_3^{n/2}$ vom Index 2.
- \mathcal{D}_3^{2n} enthält zunächst einmal für alle $n \geq 2$ die zyklische Gruppe \mathcal{C}_3^n als Untergruppe vom Index 2.

Für n gerade enthält sie zusätzlich noch \mathcal{D}_3^n und eine zu dieser geometrisch äquivalente Gruppe (wenn also $n \geq 4$). Dies macht man sich klar, indem man die Konjugationsklassen der zu \mathcal{D}_3^{2n} isomorphen Diedergruppe \mathcal{D}_2^{2n} betrachtet. Diese sind in James/Liebeck [25], S.107/108, aufgeführt. Wir suchen Untergruppen vom Index 2, also insbesondere Normalteiler der Gruppe. Normalteiler sind aber Vereinigungen von Konjugationsklassen der Gruppe¹. Bedenkt man schließlich, daß die $\{1\}$ dieser Vereinigung angehören muß, und achtet man auf die Abgeschlossenheit der Untergruppe, so erkennt man für n ungerade, daß \mathcal{D}_2^{2n} nur eine Untergruppe vom Index 2 enthält, die \mathcal{C}_2^{2n} .

Übernimmt man die Notation aus Beispiel 2.1.2, $\mathcal{D}_2^{2n} = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = \sigma\tau\sigma\tau = 1 \rangle$, so sieht man, daß es für n gerade noch zwei weitere Normalteiler vom Index 2 in \mathcal{D}_2^{2n} gibt, $N := \langle \sigma^2, \tau \rangle$ und $M := \langle \sigma^2, \tau\sigma \rangle$. (Die Spiegelungen bilden für n gerade zwei Konjugationsklassen.) N und M sind nach Kapitel 2 natürlich zu \mathcal{D}_2^n geometrisch äquivalent; sie stellen die Spiegelungsgruppen zweier regelmäßiger, im Ursprung zentrierter $\frac{n}{2}$ -Ecke dar, die dem regelmäßigen n -Eck einbeschrieben werden können. Vergleiche dazu Abbildung 3.5 (der Fall

Abbildung 3.5: Zur Untergruppenstruktur der \mathcal{D}_2^{2n} , n gerade



$n=8$): N bildet das durchgezogen eingezeichnete 4-Eck auf sich selbst ab, M das gepunktete. Die in „Zeile 2“ auf Seite 21 beschriebene Bijektion zwischen \mathcal{D}_2^{2n} und \mathcal{D}_3^{2n} führt N in \mathcal{D}_3^n über; M wird dabei auf eine zu \mathcal{D}_3^n geometrisch äquivalente Gruppe abgebildet, die wir hier kurz \mathcal{X} nennen wollen.

Mittels der Untergruppen \mathcal{D}_3^n und \mathcal{X} erhalten wir (für n gerade) allerdings nur eine neue Gruppe, da auch $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{D}_3^n$ und $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{X}$ geometrisch äquivalent sind: Dies ist zwar nicht von vorne herein offensichtlich, wird aber klar, wenn man sich anhand von „Zeile 1“ und „Zeile 2“ noch einmal die geometrische Lage der Drehachsen und Spiegelungsebenen der Elemente von \mathcal{D}_3^{2n} bzw. $(-1)(\mathcal{D}_3^{2n} \setminus \mathcal{D}_3^n)$ vor Augen führt. Man erkennt dann, daß die beiden Gruppen durch eine Basistransformation ineinander übergeführt werden können, die einer Drehung des dort eingeführten Koordinatensystems um den Winkel $\frac{\pi}{n}$ um eine Achse senkrecht zu der ebenda ausgezeichneten Ebene entspricht.

Wir fassen zusammen: \mathcal{D}_3^{2n} liefert uns bei ungeradem n eine neue Gruppe $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$, bei geradem n neben $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$ ferner auch eine Gruppe $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{D}_3^n$.

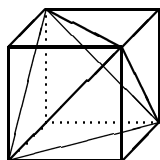
- \mathcal{T} , die Tetraedergruppe, operiert *treu* auf des Tetraeders vier Ecken. Sie ist deshalb isomorph zu einer Untergruppe der $Sym(4)$. Jene, von der Ordnung 24,

¹vgl. James/Liebeck [25], S.113

besitzt als einzige Untergruppe der Ordnung 12 die alternierende Gruppe $Alt(4)$, vgl. Kurzweil [27], S.53. Deshalb ist \mathcal{T} isomorph zur $Alt(4)$. Die $Alt(4)$ beinhaltet aber keine Untergruppe vom Index 2, wie die Konjugationsklassenmächtigkeiten² verraten. Hier werden wir also nicht fündig.

• Betrachten wir für \mathcal{O} einmal stellvertretend den Würfel. Wie man sich schnell anhand eines Modells überzeugt, operiert \mathcal{O} treu auf der Menge der vier Würfel diagonale und ist folglich ebenfalls eine Untergruppe der $Sym(4)$, wegen $|\mathcal{O}| = 24$ sogar isomorph zu ihr. Wie wir bereits wissen, enthält die $Sym(4)$ einzig die $Alt(4)$ als Untergruppe vom Index 2, welche isomorph zur Tetraedergruppe ist. In der Tat läßt sich ein Tetraeder so in einem Würfel plazieren, daß $\mathcal{T} \leq \mathcal{O}$ ist: Man wähle jeweils eine der beiden Diagonale einer jeden der sechs Würfelseiten aus, so daß das Tetraeder entsteht:

Abbildung 3.6: Tetraeder im Würfel



Und tatsächlich führen genau zwölf der 24 Elemente von \mathcal{O} das einbeschriebene Tetraeder in sich selbst über: Die Identität, drei π -Drehungen, jeweils um die Verbindungsgerade gegenüberliegender Seitenmittelpunkte, sowie Drehungen von $2\pi/3$ und $4\pi/3$ um jede der vier Würfel diagonale. Dies führt zu einer endlichen Gruppe $\mathcal{O}\mathcal{T} \leq \mathcal{O}(V)$.

• Die Ikosaedergruppe schließlich besitzt keinen Normalteiler vom Index 2, denn sie ist isomorph zu der bekanntlich³ einfachen Gruppe $Alt(5)$. Den Isomorphismus sieht man wie folgt: Betrachte die 15 Achsen, die zu den π -Drehungen um die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Kantenmittelpunkte gehören. In ein Modell eingespannt, erkennt man bald, daß jeweils drei aufeinander senkrecht stehen. Benutzt man für jedes dieser fünf Tripel einen andersfarbigen Faden, so kann man durch Drehen des Modells (d.h. Anwenden der Gruppenelemente) und mit etwas Geduld feststellen, daß die Ikosaedergruppe diese fünf Fadenkreuze treu permutiert; also ist wegen $|\mathcal{I}| = 60$ die Ikosaedergruppe isomorph zur einzigen Untergruppe vom Index 2 in der $Sym(5)$, der $Alt(5)$.

Wir haben gezeigt:

3.2.2 Satz (Endl. Gruppen in 3D) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\dim V = 3$. Untenstehend sind alle endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$ aufgeführt:

- C_3^n , $n \geq 1$; D_3^{2n} , $n \geq 2$; \mathcal{T} ; \mathcal{O} ; \mathcal{I} ;
- $(C_3^n)^*$, $n \geq 1$; $(D_3^{2n})^*$, $n \geq 2$; \mathcal{T}^* ; \mathcal{O}^* ; \mathcal{I}^* ;
- $C_3^{2n}C_3^n$, $n \geq 1$; $D_3^{2n}C_3^n$, $n \geq 2$; $D_3^{4n}D_3^{2n}$, $n \geq 2$; $\mathcal{O}\mathcal{T}$. \square

²aufgeführt in James/Liebeck [25], S.112

³siehe dazu z.B. Kurzweil [27], S.52

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Liste die Gruppen in bezug auf unseren geometrischen Äquivalenzbegriff unterscheidet. Denn natürlich sind beispielsweise die drei Gruppen der Ordnung zwei, \mathcal{C}_3^2 , $(\mathcal{C}_3^1)^*$ und $\mathcal{C}_3^2]\mathcal{C}_3^1$, isomorph. Die drei Elemente ungleich der Eins wirken aber sehr unterschiedlich im dreidimensionalen Raum, als da sind eine Drehung um den Winkel π , eine Punktspiegelung sowie eine Spiegelung. Darstellende Matrizen bezüglich bestimmter Orthogonalbasen von V haben entsprechende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die drei Matrizen unterscheiden sich u.a. durch verschiedene Spuren (-1, -3 und 1), eine Invariante unter Koordinatentransformationen. Konjugationen in $\mathcal{O}(V)$ können die drei Gruppen also nicht ineinander überführen; sie sind deshalb in der Tat auch nach Definition geometrisch unterscheidbar.

3.3 Endliche Spiegelungsgruppen

In diesem Sinne ist also Satz 3.2.2 zu verstehen, und es sind dort, wie man sich überlegen kann, alle angeführten Gruppen geometrisch unterscheidbar.

Um den dieses Kapitel abschließenden Satz, welcher alle geometrisch unterscheidbaren endlichen Spiegelungsgruppen im \mathbb{R}^3 auflisten wird, etwas eleganter beweisen zu können, stellen wir ihm noch ein kleines Lemma voran:

3.3.1 Lemma *Sei $d \in \mathcal{SO}(V)$ eine Drehung um den Winkel θ . Dann ist $(-1)d$ eine Spiegelung dann und genau dann, wenn $\theta = \pi$ ist. Die Spiegelungsebene von $(-1)d$ steht dann senkrecht auf der Drehachse von d .*

Beweis: Man verifiziert dies leicht, indem man in geeigneter Basis (\rightarrow beachte (3.1) auf Seite 20) die Spur der $(-1)d$ darstellenden Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

gleich 1 (siehe Folgerung 1.1.5(d)) setzt. □

3.3.2 Satz (Endl. Spiegelungsgruppen in 3D) *Es sei wieder $\dim V = 3$ und $n \in \mathbb{N}$. Alle endlichen Spiegelungsgruppen in $\mathcal{O}(V)$ sind die folgenden:*

- $(\mathcal{D}_3^{2n})^*$, n gerade; \mathcal{O}^* ; \mathcal{I}^* ;
- $\mathcal{C}_3^2]\mathcal{C}_3^1$; $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$, $n \geq 2$; $\mathcal{D}_3^{4n}]\mathcal{D}_3^{2n}$, $n \geq 3$ und ungerade; $\mathcal{O}]\mathcal{T}$.

Beweis: Wir haben für jede Gruppe aus Satz 3.2.2 nachzuprüfen, ob sie von in ihr enthaltenen Spiegelungen erzeugt wird. Die Drehungsgruppen scheiden natürlich sofort aus. Die anderen Gruppen werden der Reihe nach erörtert:

- $(\mathcal{C}_3^n)^*$, $n \geq 1$: Spiegelungen können nur in der Teilmenge $(-1)\mathcal{C}_3^n$ gefunden werden. Nach (3.1) und Lemma 3.3.1 enthält $(\mathcal{C}_3^n)^*$ für n ungerade keine, für n gerade genau eine Spiegelung, welche dann eine Untergruppe der Ordnung zwei

erzeugt. Dies kann aber nicht die vollständige Gruppe sein, da im Falle von n gerade $n \geq 2$, also $|(\mathcal{C}_3^n)^*| \geq 4$ ist.

- $(\mathcal{D}_3^{2n})^*$, $n \geq 2$: Es ist in geeigneter Basis, beachtet man (3.1) und (3.2),

$$(\mathcal{D}_3^{2n})^* = \mathcal{D}_3^{2n} \cup \left\{ a(\varphi) := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}, \right. \\ \left. b(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ mit } \varphi = k\theta, k \in \{1, \dots, n\}, \theta = 2\pi/n \right\}.$$

Spiegelungen in $(\mathcal{D}_3^{2n})^*$ sind dabei alle Elemente $b(\varphi)$, nach (3.2) und Lemma 3.3.1, sowie im Falle von n gerade zusätzlich noch $a(\pi)$, nach Lemma 3.3.1.

Ist n ungerade, so ist $(\mathcal{D}_3^{2n})^*$ nicht von Spiegelungen erzeugt, da die -1 „links oben“ nicht erzielt werden kann.

Für n gerade dagegen treffen wir auf unsere erste Spiegelungsgruppe, erzeugt doch die Menge $S := \{a(\pi), b(2\pi), b(\pi), b(\theta)\}$ die ganze Gruppe: Wir finden $a(\pi)b(2\pi)b(\pi) = (-1) \in \langle S \rangle^1$, sowie $\mathcal{D}_3^{2n} \in \langle S \rangle$, da nach „Zeile 2“ vor Satz 3.1.3 $\mathcal{D}_3^{2n} = \langle \{(-1)b(\theta), a(\pi)b(\pi)\} \rangle^2$ ist; also folgt $(\mathcal{D}_3^{2n})^* = \langle (-1), \mathcal{D}_3^{2n} \rangle \leq \langle S \rangle \leq (\mathcal{D}_3^{2n})^*$.

- \mathcal{T}^* : Vorbemerkung: Hierbei handelt es sich nicht um die (noch auszumachende) vollständige Symmetriegruppe des Tetraeders, da $(-1) \in \mathcal{T}^*$ das Tetraeder nicht in sich selbst überführt.

Nach „Zeile 3“ und Lemma 3.3.1 enthält \mathcal{T}^* genau drei Spiegelungen, deren Spiegelungsebenen jeweils senkrecht auf einer der drei Geraden stehen, die durch Verbindung gegenüberliegender Kantenmittelpunkte entstehen. Ebenso wie die drei Geraden stehen auch die drei Ebenen paarweise aufeinander senkrecht. Dies überlegt man sich in einer Zeichnung oder am Modell. Die von ihnen erzeugte Gruppe ist folglich geometrisch äquivalent zu einer der eben besprochenen, $(\mathcal{D}_3^4)^*$, besteht also insbesondere nur aus acht Elementen und ist deshalb nicht gleich \mathcal{T}^* .

- \mathcal{O}^* : Diese Gruppe ist eine Untergruppe der vollständigen Oktaedergruppe, da letztere die -1 enthält.

Welche Spiegelungen gibt es in \mathcal{O}^* ? (Wir betrachten wieder das Oktaeder.) Nach Lemma 3.3.1 und „Zeile 4“ finden wir drei Spiegelungsebenen, jeweils senkrecht zu den Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken, und sechs weitere, jeweils senkrecht zu den Verbindungsstrecken gegenüberliegender Kantenmiten. Erzeugen diese, zusammengefaßt zur Menge S , ganz \mathcal{O}^* ?

Dazu: Das Produkt der drei ersten Spiegelungen ergibt wieder die -1 . Im folgenden zeigen wir für jede nichttriviale Drehung in \mathcal{O} , daß sie zu $\langle S \rangle$ gehört: Wählen wir als erstes eine beliebige $\pi/2$ -Achse, die also zwei gegenüberliegende Ecken verbindet. Wir müssen zwei dazu parallele Spiegelungsebenen ausmachen, die sich unter einem Winkel von $\pi/4$ schneiden, da das Produkt der beiden dann, wie bei der Diedergruppe in zwei Dimensionen, eine Drehung um die Schnittgerade der beiden Ebenen um den doppelten, eingeschlossenen stumpfen

¹Das Produkt dreier Spiegelungen, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ist allgemein gleich -1 .

²vergleiche dazu auch Schlußbemerkung zu Kapitel 2

Winkel darstellt. Solche Ebenen finden wir in S . Analog existieren in S auch zu jeder der sechs π -Drehungen in \mathcal{O} zwei passende Ebenen, die hier natürlich einen Winkel von $\pi/2$ einschließen.

Wir haben also $\langle S \rangle = \mathcal{O}^*$ gezeigt und eine weitere Spiegelungsgruppe gefunden, die in der Tat auch schon die vollständige Oktaedergruppe ist: Keine weiteren Spiegelungen erhalten das Oktaeder³.

- \mathcal{I}^* : Vorgehensweise wie bei \mathcal{O}^* ; man findet 15 Spiegelungen in \mathcal{I}^* , deren Ebenen jeweils senkrecht auf der Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Kantenmitten stehen. Unter diesen ist für jede Drehung in \mathcal{I} ein passendes Paar zu finden, und auch drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Spiegelungsebenen sind auszumachen. Und wieder ist die folglich von Spiegelungen erzeugte Gruppe \mathcal{I}^* die vollständige Gruppe des Ikosaeders.

- $\mathcal{C}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$, $n \geq 1$: Spiegelungen können, wenn überhaupt, nur in der Teilmenge $(-1)(\mathcal{C}_3^{2n} \setminus \mathcal{C}_3^n)$ gefunden werden. $\mathcal{C}_3^{2n} \setminus \mathcal{C}_3^n \subset \mathcal{SO}(V)$ wiederum enthält nur im Falle von n ungerade (genau) eine Drehung um den Winkel π (; für n gerade ist diese eine in \mathcal{C}_3^n). $\mathcal{C}_3^2]\mathcal{C}_3^1$ ist also eine Spiegelungsgruppe, da lediglich von der Ordnung 2, und stellt gleichzeitig diejenige Untergruppe in $\mathcal{C}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$ (n ungerade) dar, die deren eine Spiegelung enthält.

- $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$, $n \geq 2$: Da die Menge $\mathcal{D}_3^{2n} \setminus \mathcal{C}_3^n$ ausschließlich aus π -Drehungen besteht, beinhaltet die Gruppe genau n Spiegelungen. Jene ist von der Mächtigkeit $2n$, also von den Spiegelungen erzeugt, ist doch das Quadrat einer Spiegelung gleich Eins und damit die Mächtigkeit der erzeugten Menge größer gleich $n + 1$.

- $\mathcal{D}_3^{4n}]\mathcal{D}_3^{2n}$, $n \geq 2$: Sei zunächst n gerade. Dann sind alle Spiegelungen der Gruppe in der Teilmenge $(-1) \cdot (\mathcal{D}_3^{4n} \setminus \{\mathcal{D}_3^{2n} \cup \mathcal{C}_3^{2n}\})$ enthalten. Diese n Spiegelungen erzeugen aber lediglich eine Untergruppe U vom Index 2 in $\mathcal{D}_3^{4n}]\mathcal{D}_3^{2n}$, welche geometrisch äquivalent zu der im letzten Punkt besprochenen Gruppe $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$ ist.

Sei nun n ungerade. Dann enthält unsere Gruppe noch eine weitere Spiegelung, da in diesem Falle auch die Teilmenge $\mathcal{C}_3^{2n} \setminus \mathcal{C}_3^n$ eine π -Drehung d beinhaltet. Wegen $(-1)d \notin U$ haben wir eine weitere Spiegelungsgruppe ausgemacht.

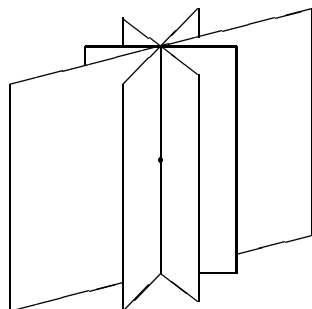
- $\mathcal{O}]\mathcal{T}$: Betrachten wir noch einmal Abbildung 3.6. In der Gruppe $\mathcal{O}]\mathcal{T}$ befinden sich (nach Lemma 3.3.1) genau sechs Spiegelungen, deren zugehörige Hyperebenen jeweils auf einer Tetraederkante senkrecht stehen und die gegenüberliegende enthalten. Ähnlich wie bei \mathcal{O}^* und \mathcal{I}^* finden wir auch hier zu jeder nichttrivialen Drehung in \mathcal{T} zwei geeignete Spiegelungen, deren Produkt die Drehung ergibt. Die Gruppe $\mathcal{O}]\mathcal{T}$ ist folglich eine Spiegelungsgruppe. Die in ihr enthaltenen sechs Spiegelungen sind zudem die einzigen, die wir im Tetraeder ausmachen können. Deshalb handelt es sich bei dieser Gruppe um die noch fehlende vollständige des Tetraeders. \square

Am Ende dieses Kapitels wollen wir die drei noch nicht ganz so vertrauten Spiegelungsgruppen $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$ ($n \geq 2$), $(\mathcal{D}_3^{2n})^*$ (n gerade) und $\mathcal{D}_3^{4n}]\mathcal{D}_3^{2n}$ ($n \geq 3$ und ungerade) etwas genauer betrachten. Erstere ist die triviale Fortsetzung der Diedergruppe \mathcal{D}_2^{2n} (vgl. Abbildung 3.7), operiert also (ebenso wie $\mathcal{C}_3^2]\mathcal{C}_3^1$, die triviale Fortsetzung der Gruppe \mathcal{D}_1^2) insbesondere nicht wesentlich auf $V =$

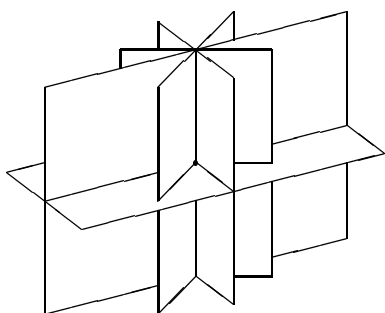
³Anm.: Alle Drehsiegelungen sind automatisch in der Gruppe, wenn dies alle Spiegelungen und Drehungen sind, vgl. Bemerkung zu Satz 3.1.1.

\mathbb{R}^3 – im Gegensatz zu den übrigen in Satz 3.3.2 aufgelisteten Gruppen, wie man sich leicht überlegen kann (oder schon bald mittels Folgerung 4.2.6 auf den ersten Blick erkennen wird). Zudem stellt $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$ eine Untergruppe vom Index 2 in jeder der beiden anderen Gruppen dar. Abbildung 3.7 legt sogar die Vermutung nahe, es handle sich sowohl bei $(\mathcal{D}_3^{2n})^*$ als auch $\mathcal{D}_3^{4n}]\mathcal{D}_3^{2n}$ in den betrachteten Fällen um das direkte Produkt $(\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n) \times (\mathcal{C}_3^2]\mathcal{C}_3^1)$. Letzteres steht allerdings noch nicht ganz im Einklang mit unserer Auffassung direkter Produkte (siehe Kapitel 1); reduziert man die darin vorkommenden Gruppen $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$ und $\mathcal{C}_3^2]\mathcal{C}_3^1$ jedoch noch auf ihre wesentlichen Anteile, so wäre für n gerade $(\mathcal{D}_3^{2n})^* = \mathcal{D}_2^{2n} \times \mathcal{D}_1^2$, und für $n \geq 3$ und ungerade auch $\mathcal{D}_3^{4n}]\mathcal{D}_3^{2n} = \mathcal{D}_2^{2n} \times \mathcal{D}_1^2$. Dies ist in der Tat der Fall, wie man in Kapitel 7 sehen wird, oder sich auch jetzt schon überlegen kann.

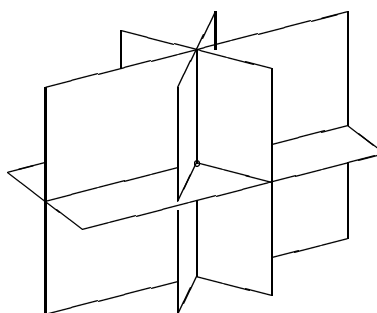
Abbildung 3.7: Visualisierung $\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$, $(\mathcal{D}_3^{2n})^*$ und $\mathcal{D}_3^{4n}]\mathcal{D}_3^{2n}$



$\mathcal{D}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$ für $n = 4$



$(\mathcal{D}_3^{2n})^*$ für $n = 4$



$\mathcal{D}_3^{4n}]\mathcal{D}_3^{2n}$ für $n = 3$

Abbildung 3.7 beleuchtet die besprochenen Tatsachen; für jede der drei diskutierten Gruppen ist die Lage der Spiegelungsebenen anhand eines Beispiels dargestellt. (Es mag vielleicht verwundern, daß $\mathcal{D}_2^{2n} \times \mathcal{D}_1^2$ in unserer Klas-

sifikation der dreidimensionalen Spiegelungsgruppen für n gerade eine andere Bezeichnung erhielt als für n ungerade. Ursache dafür ist lediglich, daß unser Aufbau (vgl. Abschnitt 3.2) die Gruppen auch danach unterscheidet, ob sie das Element -1 enthalten ($(\mathcal{D}_3^{2n})^*$) oder nicht ($(\mathcal{D}_3^{4n}] \mathcal{D}_3^{2n}$).

