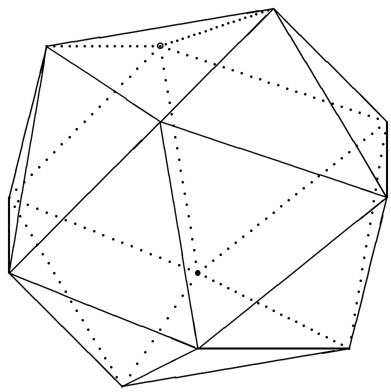
Endliche Spiegelungsgruppen

Zulassungsarbeit
zum ersten Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien
im Bereich Mathematik
durchgeführt am Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
an der Universität Augsburg



eingereicht am 03.08.1998
von Achim Brunnermeier

Betreuung/Korrektur:
Priv.-Doz. Dr. Robert Boltje

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

> „These groups can be made vividly comprehensible by using actual mirrors for the generating reflections. It is found that a candle makes an excellent object to reflect. By hinging two vertical mirrors at an angle $\pi/k(k = 2, 3, 4, \ldots)$, we easily see 2k candle flames, in accordance with the group $[k]$. To illustrate the groups $[k_1, k_2]$, we hold a third mirror in the appropriate positions.“
>
> H.S.M. Coxeter [11], S.589

Die vorliegende Arbeit wurde in der Absicht geschrieben, allen Interessierten eine möglichst einfache und anschauliche Einführung in die Theorie der endlichen (reellen) Spiegelungsgruppen zu bieten. Insbesondere richtet sie sich an StudentInnen, die bereits ein Semester Algebra oder Gruppentheorie besucht und Spaß an dieser Art des Denkens gefunden haben – und nun gerne ihre neu erworbenen Kenntnisse an einer konkreten Anwendung versuchen wollen. Zum Verständnis des Textes sind dementsprechend auch lediglich *Grundkenntnisse* aus Linearer Algebra, Analysis (sehr wenig) und der Gruppentheorie (insbesondere: Operation von Gruppen auf Mengen; freie Gruppen) nötig.

Dies ist insofern ungewöhnlich, als die zu diesem Thema vorliegenden Werke (etwa Grove/Benson [19], Witt [35], Humphreys [22] oder Coxeter/Moser [16]) auch auf Ergebnisse aus der Lie Theorie (Weylgruppen, kristallographische Wurzelsysteme) oder der Topologie (sphärische Simplexe, Komplexe) zurückgreifen (vgl. *Historisches/Ausblick* am Ende des Buches). Vermeidet man dies, wie hier geschehen, so geht das bisweilen auf Kosten von Knappheit und Eleganz – bleibt aber leicht verständlich. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit komplett, d.h. in ihr werden alle endlichen (reellen) Spiegelungsgruppen klassifiziert. Zahlreiche Beispiele motivieren und veranschaulichen stets die Theorie.

Im wesentlichen besteht dieses Buch aus zwei Teilen. Zunächst werden aber in Kapitel 1 die für den Gegenstand der Arbeit notwendigen Begriffe eingeführt (insbesondere eine Äquivalenzrelation für unsere Gruppen) und ferner einige weniger bekannte Ergebnisse aus der Linearen Algebra vorgestellt und bewiesen.

Teil I (Kapitel 2 und 3) bietet dann eine komplette Auflistung *aller* endlichen Untergruppen der Gruppe aller orthogonalen Transformationen auf zwei- und dreidimensionalen euklidischen Vektorräumen. Als Orientierung dienten hierzu vor allem Grove/Benson [19], Yale [36] und Armstrong [2].

Teil II (Kapitel 4–8) ist der Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen in der Gruppe aller orthogonalen Transformationen auf n-dimensionalen Vektorräumen gewidmet, mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und ist im Prinzip unabhängig von Teil I konzipiert. Allerdings schöpfen wir häufig aus dem reichen Beispielvorrat des I. Teils, um der bisweilen trockenen Theorie etwas Leben einzuhauchen.

In den Kapiteln 4 und 5 wird für die Gruppen eine relativ kleine Menge von Erzeugern vorgestellt und bezüglich dieser die Menge der definierenden Relationen bestimmt. Kapitel 6 beschäftigt sich mit Untergruppenstrukturen sowie Konsequenzen, die sich aus der Operation der Gruppen auf dem jeweiligen Vektorraum ergeben. Auf relativ algebraische Art und Weise wird dann in Kapitel 7 die Klassifikation vorangetrieben: Die Möglichkeiten für die Gestalt der den Gruppen zuzuordnenden Graphen werden stark eingeschränkt. In Kapitel 8 gelingt es schließlich, zu jedem dieser Graphen eine endliche Spiegelungsgruppe zu konstruieren; Abschnitt 8.4 faßt die Ergebnisse in einer Tabelle noch einmal zusammen.

Als Quellen wurden für die Kapitel 4–7 vor allem Humphreys [22], Witt [35], Coxeter [11], [13] und Grove/Benson [19] verwendet. Kapitel 8 ist weitgehend unabhängig von Sekundärliteratur entstanden; Ideen stammen aus Grove/Benson [19] (für Abschnitt 8.1), Bourbaki [4] (für Abschnitt 8.2) und Witt [35] (für Abschnitt 8.3).

Ein mit *Historisches/Ausblick* betiteltes Kapitel soll die vorliegende Arbeit abrunden. Darin wird genauer auf die verwendeten Quellen eingegangen, es wird untersucht, wer wann und wo Grundsteine zur betrachteten Materie legte, und es werden Anmerkungen zu einigen Passagen dieses Buches gemacht, die mit Hilfe weiterführender Theorien anders, kürzer oder auch einfacher hätten gestaltet werden können. Insbesondere soll allen interessierten Leserinnen und Lesern das Vordringen zu den Wurzeln und Ursprüngen dieser Thematik erleichtert werden – zu Pionieren wie *Coxeter* und *Witt*.

Je ein Abbildungs-, Literatur- und Stichwortverzeichnis unterstützen (neben dem Inhaltsverzeichnis) die Orientierung innerhalb des Textes. Die formale Gestaltung der Arbeit ist absolut selbsterklärend und bedarf daher keiner weiteren Erläuterung.

Zuallerletzt zwei Worte des Dankes. Bei Gabi und Matthias bedanke ich mich für das geduldige Korrekturlesen. Dr. Robert Boltje danke ich für die wunderbare Betreuung.

Achim Brunnermeier, Juni 1998.